G. Dalba P. Fornasini

**ESERCIZI DI FISICA: MECCANICA E**

**TERMODINAMICA**

Springer

**Collana di Fisica e Astronomia**

A cura di:

Giorgio Parisi Michele Cini Stefano Forte Massimo Inguscio Guido Montagna Oreste Nicrosini Franco Pacini Luca Peliti Alberto Rotondi

**Esercizi di Fisica: Meccanica e Termodinamica**

G. Dalba, P. Fornasini

**Esercizi di Fisica: Meccanica e Termodinamica**

13

GIUSEPPE DALBA,PAOLOP FORNASINI Dipartimento di Fisica Università di Trento

Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media

springer.it

© Springer-Verlag Italia, Milano 2006

ISBN 10 88-470-0404-7 ISBN 13 978-88-470-0404-7

Quest’opera è protetta dalla legge sul diritto d’autore. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla tradu- zione, alla ristampa, all’uso di figure e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla riproduzione su microfilm o in database, alla diversa riproduzione in qualsiasi altra forma (stampa o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. Una riproduzione di quest’opera, oppu- re di parte di questa, è anche nel caso specifico solo ammessa nei limiti stabiliti dalla legge sul diritto d’au- tore, ed è soggetta all’autorizzazione dell’Editore. La violazione delle norme comporta sanzioni previste dalla legge.

L’utilizzo di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc., in quest’opera, anche in assenza di particolare indicazione, non consente di considerare tali denominazioni o marchi liberamente utilizzabili da chiunque ai sensi della legge sul marchio.

Riprodotto da copia camera-ready fornita dagli Autori Progetto grafico della copertina: Simona Colombo, Milano Stampato in Italia: Signum, Bollate (Mi)

**Prefazione**

La soluzione di esercizi rappresenta non solo uno strumento di verifica dell’apprendimento, ma anche e soprattutto un modo per meglio comprendere e assimilare i concetti di base e le procedure logiche della Fisica. Questa raccolta `e nata da una lunga pratica degli Autori nell’insegnamento della Meccanica e della Termodinamica nei corsi di laurea in Fisica, Mate- matica e Ingegneria presso l’Universit`a di Trento.

Il primo capitolo `e dedicato alla presentazione di alcuni importanti “strumenti di lavoro”: si inizia con i sistemi di unit`a di misura (in particolare il Sistema Internazionale) e con l’uso dell’analisi dimensionale; si passa poi al significato e all’uso delle cifre significative e delle tecniche per l’arrotondamento; vengono infine forniti suggerimenti per disegnare in modo corretto ed efficace grafici con scale lineari e non lineari.

I capitoli successivi contengono gli esercizi, suddivisi per argomenti: statica, cinematica, dinamica del punto, dinamica dei sistemi, dinamica del corpo rigido, oscillazioni, termodinamica. Generalmente, la statica viene introdotta come caso particolare della dinamica. La scelta di iniziare questa raccolta dalla statica consente di acquistare subito familiarit`a con il formalismo vet- toriale. La definizione di forza basata sui principi della dinamica verr`a co- munque introdotta nel capitolo dedicato alla dinamica del punto. Ogni capitolo si articola in paragrafi, costituiti da una scheda riassuntiva e da alcuni esercizi completamente svolti. Ogni capitolo si conclude con una serie di problemi non risolti.

Le schede riassuntive hanno lo scopo di richiamare in modo sintetico concetti che si suppongono gi`a acquisiti in forma sistematica e approfondita seguendo le lezioni in aula e studiando i libri di testo. Le schede di questo volume non costituiscono (e quindi non sostituiscono) un libro di testo.

Gli esercizi completamente svolti hanno lo scopo di familiarizzare lo studente con una metodologia di risoluzione razionale, basata sempre sull’analisi accu- rata dei dati a disposizione e sul riferimento ai principi e alle leggi della Fisica, mai sulla sola intuizione. Si raccomanda lo studente di cercare di risolvere da solo anche gli esercizi completamente svolti, e solo dopo di confrontarsi con la

VI Prefazione

nostra soluzione. Gli si consiglia anche di riflettere sugli argomenti evidenziati da un punto interrogativo al termine degli esercizi.

Al termine del volume si possono trovare le soluzioni dei problemi non risolti che concludono ogni capitolo.

Povo (Trento), *Giuseppe Dalba* settembre 2005 *Paolo Fornasini*

**Sommario**

**1 Introduzione: strumenti di lavoro** ......................... 1 1.1 Sistemi di unit`a di misura . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 1.2 Il Sistema Internazionale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 1.3 Altri sistemi di unit`a di misura . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 1.4 Analisi dimensionale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 1.5 Cifre significative e arrotondamenti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9 1.6 Grafici . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

**2 Statica**.................................................... 15 2.1 Forze attive e reazioni vincolari . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15 2.2 Forze concorrenti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17 2.3 Momento di una forza . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22 2.4 Forze complanari . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24 2.5 Forze parallele nello spazio. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26 2.6 Equilibrio di una carrucola . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35 2.7 *Problemi non risolti* .................................... 40

**3 Cinematica** ............................................... 45 3.1 Moto unidimensionale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45 3.2 Moto tridimensionale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54 3.3 Moto circolare . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63 3.4 Cinematica dei moti relativi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72 3.5 *Problemi non risolti* .................................... 82

**4 Dinamica del punto** ....................................... 87 4.1 I principi della dinamica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87 4.2 Lavoro ed energia - Conservazione dell’energia . . . . . . . . . . . . . 97 4.3 Momento angolare di un punto materiale . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112 4.4 Dinamica dei moti relativi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118 4.5 Attrito tra superfici solide . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126 4.6 *Problemi non risolti* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135

**5 Dinamica dei sistemi**. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141 5.1 Quantit`a di moto di un sistema . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141 5.2 Energia di un sistema . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 146

VIII Sommario

5.3 Momento angolare di un sistema . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150 5.4 Urti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 156 5.5 Meccanica dei fluidi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 167 5.6 Gravitazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175 5.7 *Problemi non risolti* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184

**6 Dinamica del corpo rigido** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189 6.1 Densit`a, centro di massa, momento d’inerzia . . . . . . . . . . . . . . . 189 6.2 Rotazione intorno ad un asse fisso . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 196 6.3 Moto generico del corpo rigido . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217 6.4 Rotolamento . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 232 6.5 *Problemi non risolti* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 243

**7 Oscillazioni** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 251 7.1 Oscillatore armonico . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 251 7.2 Uso dei numeri complessi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 262 7.3 Oscillazioni smorzate . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 264 7.4 Oscillazioni forzate . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 270 7.5 *Problemi non risolti* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 288

**8 Termodinamica: i principi** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 291 8.1 Equilibrio termodinamico e trasformazioni . . . . . . . . . . . . . . . . . 291 8.2 Primo principio della termodinamica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 295 8.3 Gas ideali . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 301 8.4 Secondo principio della termodinamica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 316 8.5 L’entropia . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 328 8.6 *Problemi non risolti* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 345

**A Unit`a di misura**. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 349 A.1 Sistema Internazionale (S.I.) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 349 A.2 Unit`a di misura non ammesse dal S.I. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 353 A.3 Sistemi anglosassoni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 354 A.4 Unit`a non S.I. di uso corrente in Fisica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 355 A.5 Sistema c.g.s. di Gauss . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 356

**Soluzioni** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 357

**1 Introduzione: strumenti di lavoro**

In questo primo Capitolo introdurremo alcuni concetti e tecniche utili per la soluzione dei problemi di Fisica. Ci occuperemo innanzitutto delle unit`a di misura delle grandezze fisiche, e in particolare del Sistema Internazionale, e introdurremo i fondamenti dell’analisi dimensionale. Vedremo poi come si arrotondano i risultati dei calcoli. Infine daremo alcune indicazioni sul modo di realizzare grafici bidimensionali.

**1.1 Sistemi di unit`a di misura**

Alla base di ogni operazione di misura sta la possibilit`a che alcune grandezze siano misurate in modo diretto per confronto con un campione di unit`a di misura. Nella descrizione del mondo fisico vengono introdotte molte grandezze, collegate tra loro da relazioni analitiche. In linea di principio, `e del tutto lecito scegliere per ogni grandezza un’unit`a di misura arbitraria. Ci`o porta per`o in genere all’introduzione di scomodi fattori di proporzionalit`a, oltre alla necessit`a di definire e mantenere un grande numero di campio- ni di unit`a di misura. Risulta pertanto conveniente scegliere in modo arbi- trario l’unit`a di misura solo per un numero molto piccolo di grandezze (dette *grandezze fondamentali*). Per le altre grandezze (dette *grandezze derivate*) l’unit`a di misura verr`a definita in modo univoco mediante relazioni analitiche. Costruire un *sistema di unit`a di misura* significa:

– scegliere una determinata ripartizione delle grandezze fisiche tra fonda-

mentali e derivate; – definire le unit`a di misura e gli eventuali campioni delle grandezze fonda-

mentali.

Un sistema di unit`a di misura `e detto:

– *completo* se tutte le grandezze fisiche si possono ricavare dalle grandezze

fondamentali tramite relazioni analitiche; – *coerente* se le relazioni analitiche che definiscono le unit`a delle grandezze

derivate non contengono fattori di proporzionalit`a diversi da 1; – *decimale* se multipli e sottomultipli delle unit`a di misura sono tutti

potenze di 10.

2 1 Introduzione: strumenti di lavoro

Le unit`a di misura delle grandezze fondamentali sono realizzate mediante *campioni*. Esistono campioni di unit`a di misura anche per molte grandezze derivate. Le propriet`a principali che caratterizzano un campione sono: preci- sione, invariabilit`a (nel tempo), accessibilit`a, riproducibilit`a. Si distinguono due tipi fondamentali di campioni: i *campioni naturali*, la cui definizione fa riferimento a fenomeni naturali, ed i *campioni artificiali*, costruiti appositamente. I campioni naturali assicurano la riproducibilit`a e l’invariabilit`a, anche se talora a scapito dell’accessibilit`a.

**1.2 Il Sistema Internazionale**

Il primo tentativo di costruire un sistema coerente di unit`a di misura per la meccanica `e rappresentato dal *Sistema Metrico Decimale*, proposto in Francia nel 1795. Solo per`o a partire dal 1895 (*Convenzione del metro*) `e iniziata la stipula di convenzioni internazionali per l’unificazione dei vari sistemi in uso. Negli ultimi anni si `e realizzata la convergenza verso un ben definito sistema, il *Sistema Internazionale* (S.I.), introdotto nel 1960 dalla XI Conferenza Ge- nerale dei Pesi e Misure e perfezionato dalle Conferenze successive. Oggetto di direttive della Comunit`a Europea fin dal 1971, il S.I. `e stato legalmente adottato in Italia nel 1982. Il S.I. `e completo, coerente e decimale (tranne che per la misura degli intervalli di tempo).

*Grandezze fondamentali*

Il Sistema Internazionale (S.I.) `e basato su 7 grandezze fondamentali, elencate in tabella 1.1 insieme con le rispettive unit`a di misura e simboli. Le definizioni delle unit`a sono riportate in Appendice A.1.

**Tabella 1.1.** Grandezze fondamentali del Sistema Internazionale, con unit`a di misura e relativi simboli

Grandezza Unit`a Simbolo

intervallo di tempo secondo s lunghezza metro m massa chilogrammo kg quantit`a di materia mole mol temperatura kelvin K intensit`a di corrente elettrica ampere A intensit`a luminosa candela cd

1.3 Altri sistemi di unit`a di misura 3

*Grandezze derivate*

Le unit`a di misura delle grandezze derivate si ottengono mediante semplici operazioni aritmetiche a partire dalle unit`a di misura delle grandezze fonda- mentali. Non esistono fattori di conversione diversi da uno (il S.I. `e coerente). Le unit`a di misura di alcune grandezze derivate sono dotate di nome proprio e sono elencate in Appendice A.1. *Esempio 1.* L’*accelerazione* `e una grandezza derivata. Per definizione l’accele- razione `e il rapporto tra una velocit`a ed un intervallo di tempo. La sua unit`a di misura, priva di nome proprio, `e 1ms*−*2, cio`e il rapporto tra l’unit`a di spazio e il quadrato dell’unit`a di tempo. *Esempio 2.* L’*angolo piano* e l’*angolo solido* sono grandezze derivate. Le loro unit`a di misura sono dotate di nome proprio, rispettivamente *radiante* e *stera- diante*. Il *radiante* (rad) `e l’angolo piano che sottende, su una circonferenza centrata nel suo vertice, un arco di lunghezza uguale al raggio. Lo *steradiante* (sr) `e l’angolo solido che sottende, su una sfera centrata nel suo vertice, una calotta sferica di area uguale al quadrato del raggio. *Esempio 3.* La *forza F* `e una grandezza derivata. Attraverso la legge fonda- mentale della dinamica, *F* = *ma*, l’unit`a di misura della forza `e ricondotta alle unit`a di misura della massa e dell’accelerazione. L’unit`a di misura della forza `e dotata di nome proprio, il *newton* (N), ed `e definita come 1 N = 1 Kg m s*−*2.

*Norme di scrittura*

Il S.I. codifica in modo dettagliato le norme di scrittura dei nomi e dei simboli delle grandezze fisiche, nonché l’uso dei prefissi moltiplicativi secondo multipli di 1000. I dettagli di queste norme sono riportati in Appendice A.1.

**1.3 Altri sistemi di unit`a di misura**

Nonostante il S.I. rappresenti un sistema completo, adottato a livello in- ternazionale, sono tuttora in uso anche altri sistemi di unit`a di misura. Ne facciamo qui un veloce cenno.

*Sistemi c.g.s.*

Nei sistemi c.g.s., le unit`a fondamentali della meccanica sono il centimetro, il grammo e il secondo (da cui l’acronimo c.g.s.). Per quanto riguarda la mec- canica, quindi, le differenze tra S.I. e c.g.s. si limitano a fattori potenze di 10 nei valori delle grandezze fondamentali e derivate, nonché ai nomi delle unit`a di misura. La differenza sostanziale tra i sistemi c.g.s. e il Sistema Internazionale

4 1 Introduzione: strumenti di lavoro

riguarda le grandezze elettromagnetiche. Mentre il S.I. introduce una gran- dezza fondamentale per l’elettromagnetismo (l’intensit`a di corrente), nei si- stemi c.g.s. le grandezze elettromagnetiche sono tutte derivate da quelle mec- caniche. Storicamente si sono sviluppati vari sistemi c.g.s., a seconda della legge utilizzata per definire le grandezze elettromagnetiche in funzione delle grandezze meccaniche. Il *sistema c.g.s. elettrostatico* ricava l’unit`a di carica elettrica (lo *statcoulomb*) dalla legge di Coulomb

*Fe* = *Ke q*1 *q*2*/r*2 *,* (1.1)

imponendo che la costante *Ke* sia adimensionale ed abbia il valore 1. Il *sistema c.g.s. elettromagnetico* ricava l’unit`a di corrente (l’ *abampere*) dalla legge dell’interazione elettrodinamica tra correnti

*Fm* = 2*Km I*1 *I*2 *l/d ,* (1.2)

imponendo che la costante *Km* sia adimensionale ed abbia il valore 1. Il *sistema c.g.s. simmetrizzato di Gauss* adotta le unit`a del sistema c.g.s. elettrostatico per le grandezze elettriche, le unit`a del sistema c.g.s. elettroma- gnetico per le grandezze magnetiche. Il sistema c.g.s. simmetrizzato `e ancora frequentemente usato nel campo della fisica teorica.

*Sistemi pratici*

In passato, varie unit`a di misura *pratiche* sono state introdotte in campo scientifico e tecnologico (si pensi ad esempio al cavallo vapore per la misura della potenza o alla caloria per la misura della quantit`a di calore). Con l’introduzione del S.I. le unit`a *pratiche* non dovrebbero pi`u essere usate, salvo poche eccezioni limitate a campi specialistici ed esplicitamente ammesse dal Comitato Internazionale dei Pesi e Misure (si veda l’Appendice A.1). Alcune unit`a di misura non S.I. sono frequentemente utilizzate in Fisica. Ve- diamo qui sotto alcuni esempi; altri si possono trovare in Appendice A.4 L’*unit`a di massa atomica* (u) `e 1/12 della massa di un atomo di carbonio 12, cio`e dell’isotopo del carbonio il cui nucleo contiene 12 nucleoni (6 protoni e 6 neutroni). Approssimativamente, 1 u *≃* 1.66*×*10*−*27 kg. L’*elettronvolt* (eV) `e l’energia acquistata da un elettrone nel passaggio tra due punti separati da una differenza di potenziale elettrico di 1 V. Approssi- mativamente, 1 eV *≃* 1.602*×*10*−*19 J. L’*unit`a astronomica* (ua), corrispondente all’incirca alla distanza Terra-Sole, `e usata per esprimere le distanze all’interno del sistema solare. Approssima- tivamente, 1 ua *≃* 1.496*×*1011 m. Nella misurazione degli *angoli piani* si usano spesso come unit`a di misura il *grado* (*◦*) e i suoi sottomultipli non decimali: il minuto, 1 =(1/60)*◦*, e il secondo, 1 =(1/3600)*◦*. Nella misurazione delle *distanze a livello atomico* `e spesso usato come unit`a di misura delle lunghezze l’ångström ( ̊A). 1 ̊A = 0.1nm = 10*−*10 m.

1.4 Analisi dimensionale 5

*Sistemi anglosassoni*

Nei paesi anglosassoni sono tuttora in uso unit`a di misura particolari (un elenco parziale `e riportato in Appendice A.3). I sistemi anglosassoni sono generalmente a base non decimale. Ad esempio, partendo dall’unit`a base di lunghezza, cio`e il pollice (*inch*), i principali mul- tipli sono il piede (*foot*), pari a 12 pollici, e la iarda (*yard*), pari a 3 piedi. Da notare anche che talora esistono differenze di valore tra omonime unit`a inglesi e americane. Ad esempio il gallone, unit`a di volume, vale 4.546 dm3 in Gran Bretagna e 3.785 dm3 negli Stati Uniti.

*Sistemi naturali*

In alcuni campi specialistici della Fisica si usano talora, per semplificare le notazioni e i calcoli, unit`a di misura dette *naturali* in quanto assumono come valori unitari quelli di alcune grandezze di particolare rilevanza nella fisica atomica e nucleare. Il *sistema atomico di Hartree* `e spesso utilizzato nella descrizione dei fenomeni a livello atomico. Le grandezze fondamentali per la meccanica e l’elettroma- gnetismo sono tre, come per i sistemi c.g.s.:

– la *massa*: unit`a di misura `e la massa a riposo dell’elettrone, *me* (nel S.I.

*me ≃* 9.109*×*10*−*31 kg); – la *carica elettrica*: unit`a di misura `e la carica dell’elettrone *e* (nel S.I. *e ≃*

1.602*×*10*−*19 C); – l’*azione* (prodotto di un’energia per un tempo): unit`a di misura `e il quanto d’azione *h* (costante di Planck) diviso per 2*π*, ̄*h* = *h/*2*π* (nel S.I. ̄*h ≃* 1.054*×*10*−*34 J s).

Il *sistema di Dirac* `e spesso utilizzato nella fisica delle particelle elementari. Le grandezze fondamentali sono:

– la *massa*: unit`a di misura `e la massa a riposo dell’elettrone, *me*; – la *velocit`a*: unit`a di misura `e la velocit`a della luce nel vuoto, *c* (nel S.I. *c*

= 299 792 458 m s*−*1); – l’*azione*: unit`a di misura `e ̄*h*=*h/*2*π*.

**1.4 Analisi dimensionale**

Una volta scelte le grandezze fisiche fondamentali, resta arbitraria la scelta delle loro unit`a di misura. Vogliamo studiare come il cambiamento delle unit`a di misura delle grandezze fondamentali si ripercuote sulle unit`a delle grandezze derivate. Da qui in avanti ci riferiremo solo al S.I.

6 1 Introduzione: strumenti di lavoro

**Dimensioni delle grandezze fisiche**

Supponiamo, a titolo di esempio, di sostituire l’unit`a di misura delle lunghezze, cio`e il metro, con un’unit`a L volte pi`u piccola; di conseguenza le misure

di lunghezza sono moltiplicate per L di tempo sono moltiplicate per L0 = 1 di volume sono moltiplicate per L3 di velocit`a sono moltiplicate per L

L’*esponente* del fattore L viene chiamato *dimensione* rispetto alla lunghezza. Simbolicamente, la dipendenza del valore di una grandezza qualsiasi *X* dalle unit`a delle grandezze fondamentali *A, B, C...* viene espressa tramite equazioni dimensionali del tipo:

[*X*]=[*A*]*α* [*B*]*β* [*C*]*γ...* (1.3)

L’analisi dimensionale trova applicazione pratica principalmente in mecca- nica: ci limiteremo perci`o qui a considerare le dimensioni rispetto a lunghezza, massa e tempo, simbolizzati rispettivamente con *L,M,T*. Ad esempio, le di- mensioni della velocit`a sono[*v*]=[*L*]1 [*T*]*−*1 [*M*]0 *,* (1.4)

le dimensioni del lavoro e dell’energia sono

[*W*] = [*E*]=[*L*]2 [*T*]*−*2 [*M*]1 *.* (1.5)

Grandezze che hanno le stesse dimensioni sono dette *dimensionalmente omo- genee*.

*Grandezze adimensionali*

Alcune quantit`a hanno dimensione nulla rispetto a tutte le grandezze fonda- mentali:

[*L*]0 [*T*]0 [*M*]0 *.* (1.6) Si tratta dei *numeri puri* (3, *√*2, *π*, ...) e delle *grandezze adimensionali*, cio`e grandezze uguali al rapporto tra due grandezze omogenee. Il valore delle grandezze adimensionali *non* dipende dalla scelta delle unit`a di misura delle grandezze fondamentali e derivate. *Esempio 1.* Gli *angoli piani*, misurati in radianti, sono grandezze adimen- sionali; la misura in radianti `e infatti il rapporto tra due lunghezze, quella dell’arco e quella del raggio. Anche gli *angoli solidi*, misurati in steradianti, sono grandezze adimensionali; la misura in steradianti `e infatti il rapporto tra due lunghezze al quadrato. *Esempio 2.* La densit`a assoluta di una sostanza `e il rapporto tra la sua massa e il suo volume: *ρ* = *m/V* . La *densit`a relativa* di una sostanza `e il rapporto tra la sua densit`a assoluta e la densit`a assoluta dell’acqua alla temperatura di 4*◦*C. La densit`a relativa `e una grandezza adimensionale.

1.4 Analisi dimensionale 7

*Principio di omogeneit`a dimensionale*

L’utilizzazione pratica dell’analisi dimensionale si fonda sul *principio di omo- geneit`a dimensionale*: possono essere uguagliate o sommate solo espressioni dimensionalmente omogenee. In altri termini, un’equazione tra grandezze fisiche `e del tipo

*A* + *B* + *C* + *...* = *M* + *N* + *P* + *...* (1.7)

dove *A, B, C, ...M, N, P, ...* devono essere monomi dimensionalmente omo- genei. In particolare, le funzioni trascendenti (sin, cos, exp, log, ...) ed i loro argomenti devono essere adimensionali. *Esempio.* Una massa appesa ad una molla esegue un moto oscillatorio. La sua posizione *x* dipende dal tempo *t* secondo una legge sinusoidale. La dipendenza di *x* da *t non* pu`o essere espressa come *x* = sen(*t*), in quanto: a) l’argomento *t* della funzione seno non `e adimensionale; b) la funzione seno `e adimensionale mentre *x* ha le dimensioni di una lunghezza. L’equazione corretta `e *x* = *A*sen (*ωt*), dove *A* `e una costante con le dimensioni di una lunghezza, *ω* `e una costante con le dimensioni inverse al tempo.

**Applicazioni dell’analisi dimensionale**

Ricordiamo le principali applicazioni dell’analisi dimensionale.

*Verifica delle equazioni*

L’onogeneit`a dimensionale `e *condizione necessaria* per l’esattezza di un’e- quazione tra grandezze fisiche del tipo (1.7). In altri termini, un’equazione `e corretta solo se tutti i suoi termini hanno le stesse dimensioni. L’omogeneit`a dimensionale non `e per`o *condizione sufficiente* per l’esattezza, perché:

1. l’analisi dimensionale non `e in grado di valutare l’esattezza numerica; 2. esistono grandezze dimensionalmente omogenee, ma con significato fisico ben distinto (ad esempio, il lavoro meccanico ed il momento di una forza).

*Esempio.* Si vuole calcolare la traiettoria di un proiettile lanciato con velocit`a iniziale *v*0 ad un angolo *θ* rispetto all’orizzontale. Applicando le regole della cinematica si trova

*z* = *− g*

2*v*20 cos2 *θ x*2 + *x*tg*θ ,* (1.8)

dove *x* e *z* sono le coordinate rispettivamente orizzontale e verticale. `E im- mediato verificare la correttezza dimensionale dell’equazione. Se l’omogeneit`a dimensionale non fosse stata soddisfatta, l’equazione sarebbe stata sicura- mente sbagliata. Viceversa, l’equazione avrebbe potuto essere sbagliata anche

8 1 Introduzione: strumenti di lavoro

se dimensionalmente corretta: ad esempio se per un errore di calcolo si fosse ottenuto cos *θ* anziché tg*θ* nell’ultimo termine. Per poter applicare l’analisi dimensionale alla verifica delle equazioni, `e ne- cessario che i calcoli siano fatti sotto forma letterale, ed i valori numerici siano sostituiti solo alla fine.

*Deduzione di equazioni*

L’analisi dimensionale consente, in talune particolari situazioni, di deter- minare la relazione che intercorre tra le diverse grandezze che caratterizzano un fenomeno fisico, a meno di eventuali costanti adimensionali. *Esempio.* Il periodo *T* di oscillazione di un pendolo pu`o dipendere, in linea di principio, dalla massa *m* e dalla lunghezza *l* del pendolo, dall’accelerazione di gravit`a *g* e dall’ampiezza *θ*0 dell’oscillazione. La dipendenza di *T* da *m*, *l* e *g* pot`a essere espressa dimensionalmente come

[*T* ] = [*m*]*α* [*l*]*β* [*g*]*γ*

cio`e, tenendo conto delle dimensioni di *m*, *l* e *g*,

[*T*] = [*M*]*α* [*L*]*β*+*γ* [*T*]*−*2*γ.*

Il principio di omogeneit`a dimensionale impone che

*α* = 0 *, β* + *γ* = 0 *, γ* = *−*1*/*2*,*

da cui

*T* = *C* √*l/g ,* dove *C* `e una costante adimensionale. Si noti che l’analisi dimensionale non `e in grado di determinare l’eventuale dipendenza del periodo dall’ampiezza *θ*0 (adimensionale), né il valore della costante *C*. Il periodo di oscillazione del pendolo, considerato nell’esempio precedente, pu`o comunque venire determinato in modo completo (cio`e includendo le grandezze adimensionali) risolvendo l’equazione del moto. Nel caso di sistemi fisici molto complessi, per i quali non esista una teoria completa (ad esempio, in alcuni campi della fluidodinamica) l’analisi dimen- sionale pu`o rappresentare uno strumento di grande utilit`a.

*Similitudine fisica*

Sistemi complessi di grandi dimensioni vengono spesso studiati con l’aiuto di modelli in scala ridotta (ad esempio in ingegneria idraulica ed aeronautica, in studi di elasticit`a, in studi sulla trasmissione del calore, etc). L’analisi dimensionale consente di valutare come la riduzione in scala della misura delle grandezze fondamentali si riflette sulle misure delle grandezze derivate. Risulta molto utile, nelle modellizzazioni in scala, fare ricorso a grandezze adimensionali (come le densit`a relative, il numero di Reynolds, il numero di Mach, etc.) che non dipendono dai fattori di scala.

1.5 Cifre significative e arrotondamenti 9

**1.5 Cifre significative e arrotondamenti**

Nella pratica scientifica e tecnologica si ha talora a che fare con *valori nu- merici esatti*. Ad esempio, il valore della funzione seno, in corrispondenza dell’argomento *π/*6, pu`o essere espresso con esattezza: sin (*π/*6) = 0.5. Pi`u spesso si ha a che fare con *valori numerici approssimati*. Ad esempio, il valore della funzione coseno, in corrispondenza dell’argomento *π/*6, pu`o essere espresso solo in modo approssimato, a seconda del grado di precisione desiderato: cos (*π/*6) *≃* 0.866, oppure cos (*π/*6) *≃* 0.8660254, etc.

*Misure delle grandezze fisiche*

Le misure delle grandezze fisiche sono sempre valori approssimati. Il motivo `e il fatto che qualsiasi misura `e affetta da incertezza, dovuta a varie possi- bili cause: risoluzione dello strumento, fluttuazioni casuali, errori sistematici. Il valore di una grandezza fisica misurata dovrebbe pertanto essere sempre espresso nella forma *X*0 *± δX*, dove *X*0 `e un valore centrale e *δX* individua la larghezza della fascia di incertezza. Se l’incertezza *δX* non viene esplicitamente indicata, si deve intendere che essa `e dell’ordine di grandezza immediatamente inferiore all’ultima cifra del valore di misura. Ad esempio, se una lunghezza viene quotata come *l* = 25.5 mm, si intende che l’incertezza sia dell’ordine dei centesimi di millimetro. Nell’esprimere i risultati di calcoli sui valori di grandezze fisiche `e molto importante fare attenzione al numero di cifre significative impiegate, che deve essere sempre consistente con l’incertezza dei valori di partenza. Ad esempio, supponiamo di sapere che una distanza Δ*l* = 27.5m `e stata percorsa in un intervallo tempo Δ*t* = 13.4s. Ci`o significa che la distanza `e nota a meno dei centimetri e l’intervallo di tempo a meno dei centesimi di secondo. Si vuole calcolare la velocit`a media. Allo scopo si usa una calcolatrice tascabile e si ottiene *vm* = Δ*X/*Δ*t* = 27.5/13.4 = 2.05223880597ms*−*1. `E evidente che gran parte delle cifre del risultato sono prive di significato fisico, e sarebbe pertanto errato quotarle. In questo paragrafo daremo alcune regole per arrotondare correttamente i valori numerici che si ottengono da calcoli eseguiti su valori approssimati.

*Cifre significative*

Il numero di cifre significative in un valore numerico approssimato si ottiene contando le cifre da sinistra verso destra, a partire dalla prima cifra diversa da zero. Gli eventuali zeri a sinistra delle cifre significative hanno valore puramente posizionale. Ad esempio:

– il numero 25.04 ha 4 cifre significative: 2, 5, 0, 4; – il numero 0.0037 ha 2 cifre significative: 3, 7; – il numero 0.50 ha 2 cifre significative: 5, 0.

10 1 Introduzione: strumenti di lavoro

Se il valore numerico `e intero e termina con uno o pi`u zeri (ad esempio 350 oppure 47000) `e preferibile esprimerlo in notazione scientifica. Ad esempio, consideriamo il valore 2700. In notazione scientifica il valore sar`a scritto di- versamente a seconda del numero di zeri considerati significativi:

2700 = 2*.*7 *×* 103 (2 cifre significative) 2*.*70 *×* 103 (3 cifre significative) 2*.*700 *×* 103 (4 cifre significative)

Delle cifre significative di un valore numerico:

– la prima cifra `e detta *cifra pi`u significativa*, – l’ultima cifra `e detta *cifra meno significativa*.

*Regole per l’arrotondamento*

Quando si riduce il numero di cifre di un valore numerico, la cifra meno significativa rimasta va arrotondata secondo le regole seguenti.

a) Se la prima cifra da eliminare `e 0, 1, 2, 3, 4, allora la cifra meno significa- tiva rimasta resta inalterata (arrotondamento per difetto). Ad esempio: 12.34*→*12.3 b) Se la prima cifra da eliminare `e 6, 7, 8, 9 oppure 5 seguito da al- meno una cifra diversa da zero, allora la cifra meno significativa rimasta viene maggiorata di un’unit`a (arrotondamento per eccesso). Ad esempio: 12.36*→*12.4, 12.351*→*12.4 c) Se la prima cifra da eliminare `e 5 seguito solo da zeri, allora la cifra meno significativa rimasta resta inalterata quando `e pari, viene maggio- rata di un’unit`a quando `e dispari (regola del numero pari). Ad esempio: 12.45*→*12.4, 12.35*→*12.4

*Arrotondamento nei risultati dei calcoli*

Quando si eseguono calcoli su valori numerici approssimati, le cifre del risul- tato non sono in genere tutte significative; il risultato andr`a perci`o arro- tondato in modo da mantenere solo le cifre significative. Qui di seguito ripor- tiamo alcune semplici regole per l’arrotondamento, che vanno applicate con elasticit`a e buon senso. Nel caso di *addizioni e sottrazioni* di numeri approssimati: le cifre di una somma o una differenza non sono significative alla destra della posizione che corrisponde alla cifra meno significativa posta pi`u a sinistra tra tutti i termini da sommare o sottrarre. *Esempio 1.* Supponiamo di voler addizionare i seguenti tre numeri approssi- mati: 2.456, 0.5, 3.35; il secondo numero non ha cifre significative oltre la prima posizione decimale, pertanto anche il risultato andr`a arrotondato alla prima posizione dopo la virgola:

1.6 Grafici 11

2*.*456 + 0*.*5 + 3*.*35 =

6*.*306 *→* 6*.*3

*Esempio 2.* Si vuole calcolare il valor medio dei tre numeri approssimati: 19.90, 19.92, 19.95. Usando una calcolatrice tascabile si ottiene il valor medio 19.923333, che va arrotondato a 19.92 Nel caso di *moltiplicazioni e divisioni* di numeri approssimati: se il numero che ha meno cifre significative ne ha *n*, `e ragionevole arrotondare il risultato all’*n*-ma cifra significativa, in taluni casi anche all’(*n* + 1)-ma. *Esempio 3.* Si calcola il prodotto dei due numeri approssimati 6.83 e 72 utilizzando una calcolatrice tascabile. Il risultato 491.76 va arrotondato a due cifre significative: 4.9*×* 102. *Esempio 4.* Si calcola il quoziente del numero approssimato 83.642 per il numero approssimato 72 utilizzando una calcolatrice tascabile. Il risultato 1.1616944 pu`o essere arrotondato a 2 cifre significative, 1.2, ma in questo caso `e preferibile tenere anche la terza cifra: 1.16 Le *radici quadrate* di numeri approssimati vanno generalmente arrotondate allo stesso numero di cifre significative del radicando. *Esempio 5.* Si calcola la radice quadrata di 30.74 con una calcolatrice tasca- bile. Il risultato *√*30*.*74 = 5.5443665 va arrotondato a 5.544

**1.6 Grafici**

I grafici consentono di rappresentare in modo sintetico e suggestivo i valori di due o pi`u quantit`a tra di loro correlate.

*Considerazioni generali*

Sono disponibili molti buoni programmi per eseguire grafici al calcolatore. `E bene cercare di conoscerne le principali caratteristiche, per saperli gestire efficientemente in funzione delle proprie esigenze; non sempre infatti si otten- gono i risultati migliori lasciando scegliere automaticamente al programma le propriet`a del grafico (dimensioni e divisioni degli assi, simboli, espressione dei valori numerici, etc.) Comunque, `e molto utile abituarsi anche a saper disegnare grafici approssimati a mano, su carta quadrettata. Nel disegnare un grafico, a mano o con il calcolatore, `e bene tener conto di alcune regole che consentono di renderlo pi`u leggibile ed efficace.

– La variabile indipendente va generalmente rappresentata sull’asse delle ascisse (asse orizzontale), la variabile dipendente sull’asse delle ordinate (asse verticale).

12 1 Introduzione: strumenti di lavoro

– E `sempre necessario indicare esplicitamente il nome della grandezza fisica corrispondente a ciascun asse, riportando tra parentesi l’unit`a di misura utilizzata. – Le scale sugli assi vanno scelte in modo che le coordinate di ogni punto sul grafico possano essere determinate velocemente e con facilit`a. Pertanto, le tacche sugli assi vanno poste in corrispondenza a valori numerici equi- spaziati e il pi`u possibile arrotondati: ad esempio 0, 2, 4, 6, oppure 0, 10, 20, 30. Sono da evitare valori non arrotondati (ad esempio: 1.2, 2.4, 3.6, 4.8) o addirittura non equispaziati (ad esempio 1.2, 2.35, 2.78, 3.5).

*Grafici con scale lineari*

La scala `e il rapporto tra la lunghezza misurata su un asse del grafico e la corrispondente variazione della grandezza rappresentata. Una scala `e detta lineare se il rapporto `e costante lungo tutto l’asse del grafico. I grafici con scale lineari sono utili per rappresentare fedelmente l’andamento di una funzione *y* = *f*(*x*) (Fig. 1.1 a sinistra), oppure per evidenziare l’eventuale relazione di linearit`a tra i valori due grandezze *x* e *y* misurate sperimentalmente (Fig. 1.1 a destra).

1) mc(e noizisoP0-10 4 8

Tempo (s)

) rab(e noisserPTemperatura (°C)

**Fig. 1.1.** A sinistra: grafico della funzione *x* = *A* exp(*−γt*) sin(*ωt*), adatta a de- scrivere le oscillazioni smorzate di una molla. A destra: grafico sperimentale della pressione di un gas misurata in funzione della temperatura, a volume costante.

*Grafici semi-logaritmici*

Relazioni funzionali di tipo esponenziale tra due quantit`a *x* e *y*

*y* = *a*e*bx* (1.9)

possono essere rese lineari riportando in grafico sull’asse delle ordinate il logaritmo naturale, *Y* = ln*y* anziché *y* (Fig. 1.2). La relazione tra *x* e *Y* = ln*y* `e lineare:

1.02

0.98

0.94

0 10 20

1.6 Grafici 13

ln*y* = ln*a* + *bx ,* cioe *Y* = *A* + *bx .* (1.10)

Il grafico semi-logaritmico consente di verificare facilmente se i punti (*xi,Yi*) sono E `legati da una relazione lineare del tipo (1.10). bene ricordare che l’argomento della funzone logaritmo deve essere adi- mensionale. A rigore pertanto la (1.10) `e valida solo se *y* `e una grandezza adimensionale. In caso contrario mensionale *y/a* e graficare *Y* = sarebbe ln(*y/a*). corretto E `comunque considerare uso comune il rapporto graficare adi-

*Y* = ln*y* anche se *y* `e una grandezza dimensionata, sottintendendo che *y* non rappresenti la misura della grandezza, bens`ı solo il suo valore numerico (dipendente quindi dall’unit`a di misura utilizzata).

y

Y = ln y

y

20

100-6 -3 0 3 x

6

x

x

**Fig. 1.2.** Tre diversi modi di rappresentare graficamente una serie di punti (*xi,yi*) disposti secondo una legge *y* = *a* exp(*bx*), con *a*=2, *b*=0.5. A sinistra i punti (*xi,yi*) sono rappresentati in un grafico con scale lineari. Al centro sono rappresentati i punti (*xi,*ln *yi*), sempre con scale lineari. A destra i punti (*xi,yi*) sono rappresentati in un grafico con scala verticale logaritmica

*Grafici logaritmici*

Relazioni funzionali tra due quantit`a *x* e *y* del tipo

*y* = *axb* (1.11)

possono essere rese lineari riportando in grafico sull’asse delle ordinate il logaritmo *Y* = ln*y* anziché *y* e sull’asse delle ascisse il logaritmo *X* = ln*x* anziché *x* (Fig. 1.3). La relazione tra *X* = ln*x* e *Y* = ln*y* `e lineare:

ln*y* = ln*a* + *b* ln*x ,* cioe *Y* = *A* + *bX .* (1.12)

Il grafico logaritmico consente di verificare facilmente se i punti (*Xi,Yi*) sono legati da una relazione lineare del tipo (1.12).

101 2

0100

-2-6 -3 0 3 6

10-1

-6 -3 0 3 6

14 1 Introduzione: strumenti di lavoro

y 0.6Y = ln (y)

y -0.41.0

0.4

-0.8

-1.2

0.0

0 50 100

x

2 3 4 5 X = ln (x)

10 100

x

**Fig. 1.3.** Tre diversi modi di rappresentare graficamente una serie di punti (*xi,yi*) disposti secondo una legge *y* = *axb*, con *a*=2, *b*=–0.5. A sinistra i punti (*xi,yi*) sono rappresentati in un grafico con scale lineari. Al centro sono rappresentati i punti (ln *xi,*ln *yi*), sempre con scale lineari. A destra i punti (*xi,yi*) sono rappresentati in un grafico con scale logaritmiche

*Grafici con altre scale*

Oltre alle scale logaritmiche, altre scale possono essere utilizzate per lineariz- zare particolari tipi di funzioni. Facciamo alcuni esempi. – Una sull’asse relazione delle ascisse del tipo *√x* 0.2

*y* = *a√x* pu`o essere resa lineare riportando dinate *y*2 anziché *y*. Ovviamente, anziché poiché *x*, oppure *y* = riportando *a√x* equivale sull’asse a delle or- *y* = *ax*1*/*2, la relazione pu`o essere linearizzata anche con un grafico logaritmico, come abbiamo visto pi`u sopra. – Una relazione di proporzionalit`a inversa, del tipo *xy* = *K*, pu`o essere

linearizzata graficando *y* in funzione di *K/x*.

-1.6

0.1

**2 Statica**

**2.1 Forze attive e reazioni vincolari**

Un corpo `e *libero* quando non `e connesso ad alcun altro corpo e la sua po- sizione nello spazio pu`o essere cambiata comunque liberamente. Un corpo `e *vincolato* quando la sua libert`a di movimento `e limitata da altri corpi (*vin- coli*). Quando ad un corpo sono applicate delle *forze attive*, i vincoli possono reagire mediante *forze reattive*, dette anche *reazioni vincolari*.

*Esempi di forze attive*

*Forza peso.* In prossimit`a della superficie terrestre i corpi sono soggetti alla forza peso ***P*** diretta verticalmente verso il basso (Fig. 2.1 a). La forza peso pu`o venire considerata applicata ad un solo punto del corpo, il *baricentro*. L’intensit`a della forza peso `e proporzionale alla massa del corpo:

*P* = *mg .* (2.1)

La forza peso *P* `e misurata in Newton (N), la massa *m* in chilogrammi (kg); l’accelerazione di gravit`a vale *g ≃* 9.8 m s*−*1.

00

**Fig. 2.1.** Esempi di forze: (**a**) forza peso ***P*** , (**b**) forza elastica ***F*** , (**c**) reazione normale ***N*** di una superficie orizzontale liscia

16 2 Statica

*Forza elastica.* Una molla deformata (compressa o allungata, Fig. 2.1 b) `e in grado di esercitare su un corpo una forza

***F*** = *−k* ***x****,* (2.2)

dove *k* `e una costante, detta *costante elastica*. Se la deformazione *x* della molla `e misurata in metri (m) e la forza *F* `e misurata in newton (N), allora la costante elastica `e misurata in N m*−*1.

*Esempi di vincoli e loro reazioni*

*Superficie senza attrito (superficie liscia).* Una superficie liscia pu`o esercitare una reazione normale al piano tangente la superficie nel punto di contatto. In particolare, un corpo di peso ***P*** appoggiato su una superficie liscia orizzontale subir`a una reazione ***N*** = *−****P*** (Fig. 2.1 c). Altri esempi di reazioni vincolari sono mostrati in Fig. 2.2.

a b c

**Fig. 2.2.** Reazioni vincolari normali ad una superficie liscia: la forza attiva `e il peso ***P*** , le reazioni sono ***N****,****R***1*,****R***2

*Superficie con attrito (superficie ruvida).* Un corpo a contatto con una su- perficie ruvida e sottoposto ad una forza ***F*** parallela alla superficie `e soggetto ad una reazione vincolare ***R*** avente componente non nulla *Rx* parallela alla superficie, oltre alla componente normale *N* (Fig. 2.3). ***R****x* viene detta *forza d’attrito*. Al crescere di *F* anche *Rx* aumenta. Il massimo valore che *Rx* pu`o assumere senza che il corpo si muova `e dato da:

*Rx* = *μN.* (2.3)

Il parametro *μ* `e detto *coefficiente di attrito statico*.

**Fig. 2.3.** Forze agenti su un corpo appoggiato su una superficie ruvida e sottoposto ad una trazione ***F***

2.2 Forze concorrenti 17

*Fune perfettamente flessibile.* Una fune `e in grado di reagire ad una forza attiva esercitando una *tensione* ***T*** parallela alla fune stessa (Fig. 2.4 a). Una fune pu`o reagire solo a sforzi di trazione. Un caso particolarmente interessante `e una fune di peso non trascurabile sospesa tra due pareti (Fig. 2.4 b): le reazioni vincolari nei punti di attacco hanno direzione tangente alla fune. *Cerniera liscia.* La cerniera `e costituita da un asse fisso *O* che consente la rotazione di un’asta *OA* nel piano perpendicolare all’asse (Fig. 2.4 c). Se la cerniera `e liscia (cio`e priva di attrito) la sua reazione vincolare ***R*** pu`o avere qualsiasi direzione perpendicolare all’asse. *Giunto sferico liscio.* Il giunto sferico consente la rotazione di un’asta *OA* intorno ad un punto fisso *O* (Fig. 2.4 d). La reazione vincolare ***R*** del giunto sferico pu`o assumere qualsiasi direzione nello spazio.

A

O

**Fig. 2.4.** Esempi di reazioni vincolari: (**a**) fune perfettamente flessibile, (**b**) fune appesa tra due pareti, (**c**) cerniera liscia, (**d**) giunto sferico liscio

*Diagramma di corpo libero*

Qualsiasi corpo vincolato pu`o essere considerato come libero se si sopprimono i vincoli e li si sostituisce con le loro forze di reazione vincolare. Un esempio `e dato in Fig. 2.5.

**Fig. 2.5.** Un’asta vincolata da un recipie- nte, soggetta alla forza peso ***P*** e alle reazioni vincolari ***R***1 e ***R***2 (**a**), e suo diagramma di corpo libero (**b**)

**2.2 Forze concorrenti**

*n* forze ***F*** 1*,****F*** 2*,...,****F*** *n* si dicono concorrenti se le loro rette d’azione hanno un punto *A* in comune (Fig. 2.6 a). Un sistema di forze concorrenti `e ricon- ducibile, mediante applicazioni successive della regola del parallelogramma,

18 2 Statica

ad un’unica forza ***R*** detta *risultante*:

***R*** = ∑*i* ***F*** *i ,* (2.4)

la cui retta d’azione passa per il punto *A* (Fig. 2.6 b). La condizione di equilibrio per forze concorrenti `e:

***R*** = ∑*i* ***F*** *i* = 0 *⇒*

⎧⎨⎩∑∑*i* ∑*i i Fix Fiy Fiz* = 0 = 0 = 0

(2.5)

A

**F1**

**F2**

**F1 F2**

**F3**

**F3**

**R** a **Fig. 2.6.** Forze concorrenti (**a**) e loro

b

risultante (**b**)

**Esercizio 2.1**

*Un corpo di peso* ***P*** *e di dimensioni trascurabili `e appoggiato su un piano liscio, inclinato di un angolo α rispetto all’orizzontale. Al corpo `e applicata una forza* ***F*** *parallela al piano e diretta verso l’alto (Fig. 2.7). Quale deve essere l’intensit`a della forza* ***F*** *affinché il corpo rimanga in equilibrio ?*

**F**

α **Fig. 2.7.** Esercizio 2.1

Le forze agenti sul corpo sono (Fig. 2.8 a):

- ***P*** peso del corpo - ***N*** reazione vincolare perpendicolare al piano inclinato (il vincolo `e liscio) - ***F*** forza parallela al piano inclinato

Disegnamo il diagramma di corpo libero. Le dimensioni del corpo sono tra- scurabili: possiamo considerare le forze agenti applicate al medesimo punto (Fig. 2.8 b). La condizione di equilibrio per forze concorrenti `e:

2.2 Forze concorrenti 19 ∑*i* ***F*** *i* = ***P*** + ***N*** + ***F*** = 0 *.*

Si tratta di un’equazione vettoriale. Per ottenere equazioni scalari, introdu-

**F**

**P**

**N***y y’* α

**Fig. 2.8.** Esercizio 2.1

ciamo un sistema di riferimento *Oxy*; ad esempio, scegliamo l’asse *x* parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso, l’asse *y* normale e orientato verso l’alto (Fig. 2.8 b). Decomponiamo le forze agenti lungo i due assi *x* e *y*:

***P N F*** *x* : *P* sin*α* 0 *−F y* : *−P* cos*α N* 0

Le condizioni di equilibrio per le componenti *x, y* delle forze agenti sono: {∑∑*i i* **F N F**

**N**

α

α **P P a b**

**c** *Fix* = 0 *Fiy* = 0 *⇒*

*x’ x*

{*F* = *P* sin*α N* = *P* cos*α*

(?) Discutere l’andamento di *F* e *N* in funzione dell’angolo *α*. (?) Risolvere il problema utilizzando un sistema di riferimento *O x y* con l’asse *x* orizzontale e l’asse *y* verticale (Fig. 2.8 c). Quale dei due sistemi di riferimento (*Oxy*, *O x y* ) `e pi`u conveniente ? (?) Risolvere il problema senza l’ausilio di un sistema di assi cartesiani di

riferimento. (?) Se il corpo avesse dimensioni non trascurabili, le forze agenti si potrebbero

ancora considerare concorrenti ?

La forza ***F*** ha intensit`a minore del peso ***P***. Il piano inclinato consente quindi di equilibrare una forza data ***P*** mediante applicazione di una forza di minore intensit`a.

**Esercizio 2.2**

*Un corpo di peso* ***P*** *`e appeso mediante un filo al punto C di una mensola formata da due aste AC e BC perfettamente rigide e di sezione trascurabile.*

20 2 Statica

AB

C

**Fig. 2.9.** Esercizio 2.2

*Le due aste, unite nel punto C, hanno gli estremi A e B incernierati ad un muro verticale. L’asta AC `e orizzontale, l’asta BC `e inclinata di un angolo θ rispetto al muro verticale (Fig. 2.9). Determinare gli sforzi sulle due aste.*

Un’asta rigida e di sezione trascurabile pu`o esercitare solo reazioni longitu- dinali, cio`e con la stessa direzione dell’asta. Nel punto *C* concorrono quindi tre forze (Fig. 2.10 a): - il peso ***P***; - la reazione ***R****A* dell’asta *AC*, parallela ad ***AC***; - la reazione ***R****B* dell’asta *BC*, parallela a ***BC***.

**RA** C **RB RA**

C **RB P P** a b

**Fig. 2.10.** Esercizio 2.2

La condizione di equilibrio per forze concorrenti richiede che

***P*** + ***R****A* + ***R****B* = 0 *.* Decomponiamo la forza ***P*** lungo le direzioni delle due aste, orientate conven- zionalmente come in Fig. 2.10 b:

*PA* = *P* tan*θ , PB* = *P/*cos*θ .* L’equilibrio richiede che

*RA* = *PA* = *P* tan*θ , RB* = *PB* = *P/*cos*θ .* Si noti che la componente *PB* `e maggiore del modulo P della forza peso:

*PB ≥ P .* (?) Si disegni il grafico dell’andamento di *PA* e di *PB* in funzione dell’angolo

*θ*, per 0 *≤ θ < π/*2 rad. (?) Poteva essere conveniente risolvere il problema decomponendo le forze

secondo due direzioni ortogonali ?

**PA PB**

2.2 Forze concorrenti 21

**Esercizio 2.3**

*Una sfera omogenea di peso* ***P*** *`e appoggiata a due piani lisci AB e BC, tra loro perpendicolari. Il piano BC forma un angolo β con l’orizzontale (Fig. 2.11). Determinare le reazioni vincolari dei due piani.*

**Fig. 2.11.** Esercizio 2.3

Le forze agenti sulla sfera sono (Fig. 2.12 a): - ***P*** peso, applicato al centro geometrico della sfera; - ***N*** 1 reazione vincolare del piano *AB*, perpendicolare al piano (liscio), ap-

plicata al punto di contatto piano-sfera; - ***N*** 2 reazione vincolare del piano *BC*, perpendicolare al piano, applicata

al punto di contatto piano-sfera.

**-P**

**N1 N2 P**

**N2**

**N1**

**PFig. 2.12.** Esercizio 2.3

Le tre forze agenti sono concorrenti, perché le loro rette d’azione hanno un punto in comune: il centro della sfera (Fig. 2.12 b). La condizione di equilibrio per forze concorrenti `e:∑*i* ***F*** *i* = ***N*** 1 + ***N*** 2 + ***P*** = 0 *.* Deve cio`e essere***N*** 1 + ***N*** 2 = *−****P*** *, |* ***N*** 1 + ***N*** 2 *|* = *|* ***P*** *| .* Con semplici considerazioni trigonometriche si ottiene:

*N*1 = *P* sin*β N*2 = *P* cos*β .* (?) Discutere l’andamento di *N*1 e *N*2 in funzione dell’angolo *β*, magari con

l’aiuto di un grafico. (?) Risolvere il problema utilizzando un sistema di riferimento *Oxy*. (?) Perché si `e considerata la forza peso applicata al centro geometrico della

sfera ?

22 2 Statica

2.3 Momento di una forza

Il momento, rispetto ad un punto Q, di una forza F applicata in un punto P (Fig. 2.13 a) `e un vettore τ Q definito come il prodotto vettoriale del raggio vettore r = QP per la forza F:τ Q = r × F . (2.6)

Il vettore τ Q `e perpendicolare al piano individuato da r e F. Il suo verso `e

Fig. 2.13. Calcolo del momento, rispetto al punto Q, di una forza F applicata al punto P

dato datta regola della mano destra (Fig. 2.13 b). La sua intensit`a `e

| τ Q | = r F sinθ . (2.7)

Il momento non cambia se la forza viene traslata lungo la sua retta d’azione.

Esercizio 2.4

Una forza F di componenti Fx =4, Fy =2, Fz =0 (newton) `e applicata al punto P di coordinate xp =1, yp =1, zp =0 (metri) (Fig. 2.14). A) Determinare il momento della forza F rispetto al punto O, origine del sistema di coordinate Oxyz.

Fig. 2.14. Esercizio 2.4

Indichiamo con ˆı,ˆ, ˆk i versori degli assi x,y,z. I versori ˆı,ˆ giacciono nel piano del disegno, ˆk `e perpendicolare al piano del disegno, uscente verso

2.3 Momento di una forza 23

l’alto. Il momento ***τ*** 0 della forza ***F*** rispetto al punto *O* `e dato dal prodotto vettoriale

***τ*** 0 = ***r*** *×* ***F*** = ***OP*** *×* ***F*** *.*

Le componenti di ***τ*** 0 (misurate in Newton *×* metri) si calcolano utilizzando il determinante: ∣∣∣∣∣∣

ˆ***ı*** ˆ***j*** *rx ry Fx Fy Fr****k*** ˆ*z*

*z*

∣∣∣∣∣∣ =

∣∣∣∣∣∣ˆ***ı*** 1 4 ˆ***j k*** ˆ∣1 0 2 0

∣∣∣∣∣ = 0ˆ***ı*** +0ˆ***j*** *−* 2 ***k*** ˆ= *−*2 ***k*** ˆ*.*

Il ***k*** ˆvettore (cio`e entrante ***τ*** 0 `e quindi nel piano parallelo del disegno) all’asse *z*, ed ha ha verso modulo opposto *τ*0 =2Nm. a quello del versore *B) Determinare il momento della forza* ***F*** *rispetto al punto Q di coordinate xQ* =*2, yQ* =*0, zQ* = *0* (metri)*.*

Indichiamo con ***s*** = ***QP*** il vettore congiungente *Q* con *P*. Il momento ***τ*** *Q* della forza ***F*** rispetto al punto *Q* `e dato da

***τ*** *Q* = ***s*** *×* ***F*** = ***QP*** *×* ***F*** *.*

Le componenti di ***τ*** *Q* si calcolano utilizzando il determinante

∣∣∣∣∣∣ ˆ***ı*** *sx Fx* ˆ***j*** *sy Fy Fs****k*** ˆ*z*

*z*

∣∣∣∣∣∣ =

∣∣∣∣∣∣ ˆ***ı*** ∣*−*1 4 ˆ***j*** 1 2 ***k*** ˆ0 0

∣∣∣∣∣ = *−*6 ***k*** ˆ*.*

Evidentemente ***τ*** *Q* = ***τ*** 0: il momento di una forza dipende dal punto rispetto a cui `e calcolato (polo dei momenti).

(?) Variando il polo dei momenti nello spazio `e possibile variare non solo il modulo, ma anche direzione e verso del momento di una data forza ?

*C) Si consideri ora un nuovo sistema di riferimento Ox y z , ottenuto dal precedente sistema Oxyz invertendo il verso degli assi rispetto al punto O (Fig. nuovo 2.15). sistema Si di calcoli riferimento.*

*il momento* ***τ*** 0 *della forza* ***F*** *rispetto al punto O nel*

Nel sistema *Ox y z* i vettori ***r****,****F*** hanno componenti di segno opposto rispetto al sistema *Oxyz*:*Oxyz* : ***r*** = (1*,*1*,*0) ***F*** = (4*,*2*,*0)

*Ox y z* : ***r*** = (*−*1*,−*1*,*0) ***F*** = (*−*4*,−*2*,*0)

Calcoliamo il momento di ***F*** nel riferimento *O x y z* :

24 2 Statica

*y*

*x’*

*y’*

*z*

**i’**

X

**k’** *y* **j’** O’

**j’** *x’*

**i’** *x y’*

**k’**

X

Vettore entrante

*z’* O’ O

**Fig. 2.15.** Esercizio 2.4

***τ*** 0 = ***r*** *×* ***F*** =

O

∣∣∣∣∣∣ = 0ˆ***ı*** +0ˆ***j*** *−* 2 ***k*** ˆ= *−*2 ***k*** ˆ*.*

Le calcolate componenti nel riferimento del momento *Oxyz*. ***τ*** 0 Nel *non* riferimento hanno cambiato *Ox* forza ***F*** `e quindi un vettore uscente dal piano del segno rispetto a quelle *y z* disegno il momento (nel riferimento ***τ*** 0 della

*Oxyz* era entrante). I vettori le cui componenti cambiano di segno per inversione degli assi (come il vettore posizione ***r*** e i vettori che rappresentano forze) si chiamano *vettori polari*. I vettori le cui componenti non cambiano di segno per inversione degli assi si chiamano *vettori assiali* o *pseudovettori*. Il prodotto vettoriale di due vettori polari `e un vettore assiale.

**2.4 Forze complanari**

*n* forze ***F*** 1*,****F*** 2*,...,****F*** *n* si dicono complanari se le loro rette d’azione giacciono in un medesimo piano (Fig. 2.16 a).

O

∣∣∣∣∣∣

ˆ***ı*** ˆ***j k*** ˆ*−*1 *−*1 0 *−*4 *−*2 0

*y*

**F** b

**-F**

a *x*

**Fig. 2.16.** Insieme di forze complanari (**a**) be coppia di forze (**b**)

Si dimostra che un sistema di forze complanari pu`o essere ridotto a: a) un’unica forza risultante ***R***:

***R*** :

{ *Rx Ry* = = ∑∑*i i FFiy ix*

(2.8)

b) oppure una coppia di forze di momento ***τ*** (Fig. 2.16 b):

***τ*** : *τ* = *F b* (2.9)

2.4 Forze complanari 25

Condizioni di equilibrio

Un sistema di forze complanari `e in equilibrio se e solo se sono soddisfatte contemporaneamente le due condizioni:

R = 0

{ ∑∑i i Fix Fiy = 0 = 0 (2.10) ∑τ iQ = 0 (Q qualsiasi) (2.11)

Esercizio 2.5

Due corpi, di pesi P 1 e P 2 e di dimensioni trascurabili, poggiano su di un’asta perfettamente rigida di peso trascurabile. L’asta poggia a sua volta su due supporti A e B posti a distanza l (Fig. 2.17 a sinistra). La distanza tra i due corpi `e d2, tra il corpo 1 e il supporto A `e d1, tra il corpo 2 e il supporto B `e d3 (l = d1 + d2 + d3). Determinare le reazioni vincolari dei supporti A e B.

d1 d2 d3

A B

y

**FA**

**FA**

1 2

**P1 P2**Fig. 2.17. Esercizio 2.5

Il diagramma di corpo libero `e mostrato in Fig. 2.17 a destra. Le forze agenti sull’asta sono:

- i pesi P 1 e P 2; - le reazioni vincolari F A e F B. Si tratta di un sistema di forze complanari parallele. Le condizioni di equili- brio sono: ∑i F i = 0 , ∑i τ i = 0 . (2.12) Calcoliamo i momenti τ i rispetto al punto A. Le forze sono parallele: ci si pu`o pertanto limitare a considerare le loro intensit`a. Le forze sono complanari: i loro momenti hanno tutti la stessa direzione, e ci si pu`o limitare a considerare la loro intensit`a. Le condizioni di equilibrio vettoriali (2.12) si riducono perci`o a due equazioni scalari:

∑i Fy,i = 0 , ∑i τA,i = 0 . (2.13)

26 2 Statica

Per convenzione, consideriamo τ positivo se la rotazione indotta `e di verso antiorario, {∑∑i i negativo Fy,i τA,i se la rotazione indotta `e di verso orario. = 0 = 0 ⇒

{−P1 − P2 + FA + FB = 0

−d1P1 − (d1 + d2)P2 + lFB = 0 (2.14)

Risolvendo per sostituzione il sistema (2.14): FA = [(d2 + d3) P1 + d3 P2]/l , FB = [d1 P1 + (d1 + d2) P2]/l .

(?) Come cambierebbe la soluzione del problema se i momenti venissero cal- colati, anziché rispetto al punto A, rispetto al punto B ? o rispetto ad un altro punto scelto casualmente nel piano d’azione delle forze ?

2.5 Forze parallele nello spazio

Si dimostra che un sistema di forze parallele nello spazio (ad esempio lungo la direzione z, Fig. 2.18 a) pu`o essere ridotto a) a un’unica forza risultante R:

R : Rz = ∑i Fiz , (2.15) b) oppure a una coppia di forze di momento τ:

τ : τ = F b. (2.16)

z

mi**g**

mj**g**

Fig. 2.18. Forze parallele nello **P=** Σi m

i**g** spazio: (a) caso generico; (b) caso a della forza peso, definizione di bari-

bcentro

Condizioni di equilibrio

Un sistema di forze parallele `e in equilibrio se e solo se sono soddisfatte contemporaneamente le due condizioni:

∑i τ Rz = ∑i Fiz iQ = 0 , (Q = 0 , qualsiasi) . (2.17) (2.18)

2.5 Forze parallele nello spazio 27

Forza peso: baricentro

Le forze peso applicate ad ogni elemento di volume di un corpo esteso sono parallele e concordi e possono essere ricondotte ad un’unica forza risultante (Fig. 2.18 b). Il punto d’applicazione della risultante delle forze peso (detto baricentro) non dipende dall’orientazione del corpo rispetto alla verticale. Se un corpo `e omogeneo e dotato di simmetria geometrica, il baricentro coincide con il centro di simmetria.

Esercizio 2.6

Una trave omogenea AD di lunghezza s e peso P, incernierata all’estremo A ad una parete verticale, `e tenuta in posizione orizzontale dal cavo obliquo BC applicato a distanza x dal punto A (Fig. 2.19). L’angolo tra il cavo e la trave `e θ. Il peso del cavo `e trascurabile. All’estremit`a libera della trave `e applicata una forza verticale Q diretta verso il basso. A) Determinare le reazioni vincolari esercitate dalla parete verticale nel punto A e dal cavo nel punto B.

A B

θ CD

x s **Q** Fig. 2.19. Esercizio 2.6

Le forze agenti sulla trave sono (Fig. 2.20 a):

– peso P, applicato al baricentro (centro geometrico della trave); – forza verticale Q, applicata in D e diretta verso il basso; – tensione della fune T, applicata in B; – reazione vincolare della parete R, di direzione incognita, applicata in A. E `un sistema di forze complanari: le condizioni di equilibrio sono:

∑i F i = 0 , ∑i τ i = 0 .

Poiché la direzione di R `e incognita, risulta conveniente calcolare i momenti rispetto al punto A. Proiettiamo le forze su due assi x, y, rispettivamente oriz- zontale e verticale. Scegliamo in modo arbitrario la direzione di R, ponendo ad esempio Rx > 0, Ry > 0.

28 2 Statica

R P T Q Fx : Rx 0 T cos θ 0 Fy : Ry −P T sinθ −Q τA : 0 −Ps/2 Txsinθ −Qs

y

A B

θ θ θ **P Q P Q P**

**Q a b c**

Fig. 2.20. Esercizio 2.6

Le condizioni scalari di equilibrio sono pertanto:

Rx = −T cosθ , (2.19) Ry = P + Q − T sinθ , (2.20) Tx sinθ = P s/2 + Qs . (2.21)

Dalla (2.21) si ricava l’intensit`a della reazione T: T = (P/2 + Q) x **R**

**T T R T**

x

**R**

s sinθ .

Sostituendo T nelle (2.19) e (2.20):

Rx = −(P/2 + Q)(s/x) cotθ , Ry = −(P/2 + Q) s/x + P + Q .

Rx `e sempre negativa. Ry pu`o invece essere positiva o negativa a seconda del valore della forza Q e del rapporto s/x.

B) Studiare il caso particolare s = 2x (Fig. 2.20 b).

Se il cavo `e applicato al centro della trave (s = 2x):

T = 2(P/2 + Q)/sinθ , Rx = −2(P/2 + Q) cotθ , Ry = −2(P/2 + Q) + P + Q = −Q .

Ry `e negativa per qualunque valore di Q.

C) Studiare il caso particolare s = x (Fig. 2.20 c).

2.5 Forze parallele nello spazio 29

Se il cavo `e applicato all’estremo D della trave (s = x):

T = (P/2 + Q) /sin θ , Rx = −(P/2 + Q) cotθ , Ry = −(P/2 + Q) + P + Q = P/2 .

Ry `e positiva per qualunque valore di Q.

(?) Si studi l’andamento delle soluzioni ottenute, per i diversi valori con-

siderati del rapporto x/s, nei casi limite θ → 0 e θ = π/2 rad. (?) Si risolva l’esercizio scegliendo inizialmente in modo diverso la direzione

arbitraria di R (ad esempio ponendo Rx > 0, Ry < 0). (?) Si tenti di risolvere l’esercizio usando, per il calcolo dei momenti, un polo

diverso dal punto A.

Esercizio 2.7

Un’asta omogenea di lunghezza l, peso P e sezione trascurabile, inserita per pi`u di met`a della sua lunghezza in un recipiente concavo emisferico di raggio r, `e in equilibrio nella posizione mostrata in figura 2.21.

r α A

**P** B

Fig. 2.21. Esercizio 2.7

Nell’ipotesi che l’attrito tra l’asta e la superficie del recipiente sia trascurabi- le, si determinino le reazioni vincolari e l’angolo α di inclinazione dell’asta rispetto all’orizzontale.

L’asta `e a contatto con la superficie del recipiente nei due punti A (estremo inferiore dell’asta) e B (spigolo del recipiente). Le forze agenti sull’asta (Fig. 2.22 a) sono:

– peso P , applicato al centro C dell’asta omogenea (baricentro); – reazione vincolare R1 applicata in A, perpendicolare alla superficie sferica

(perché il vincolo `e liscio); – reazione vincolare R2 applicata in B, perpendicolare alla direzione dell’asta

(perché il vincolo `e liscio).

Le forze applicate sono complanari. Le condizioni di equilibrio sono:

∑i F i = 0 , ∑i τ i = 0 .

30 2 Statica

**Fig. 2.22.** Esercizio 2.7

Consideriamo prima *l’equilibrio dei momenti* (Fig. 2.22 b). Scegliamo come polo dei momenti il punto *A*.

***AC*** *×* ***P*** + ***AB*** *×* ***R***2 = 0 *.* (2.22)

I due momenti (del peso ***P*** e della reazione ***R***2) sono entrambi perpendicolari al piano d’azione delle forze ed hanno versi opposti. Per la (2.22) i loro moduli devono essere uguali:

*|****AC*** *×* ***P*** *|* = *|****AB*** *×* ***R***2 *| .*

Tenendo presente che *AC* = *l/*2 e che *AB* = 2*r* cos *α*, si ha

(*P l/*2) cos *α* = 2*rR*2 cos*α ,*

e quindi si ricava la reazione *R*2:*R*2 = *P l/*4*r .* (2.23)

Consideriamo ora *l’equilibrio delle forze* (Fig. 2.22 c):

***P*** + ***R***1 + ***R***2 = 0 *.* (2.24)

Scegliamo un sistema di assi di riferimento ortogonali *Axy* con l’origine nel punto *A*, l’asse *x* parallelo e l’asse *y* perpendicolare all’asta e proiettiamo l’equazione (2.24) su questi assi:

{*R*1*x* = *−Px*

*R*2 + *R*1*y* = *−Py ⇒*

{*R*1 cos *α* = *P* sin*α*

*R*2 + *R*1 sin*α* = *P* cos*α*

Tenendo conto della (2.23) si ottengono due espressioni per *R*1:

*R*1 = *P* tan*α* (2.25) *R*1 = *P/*tan*α − P l/*(4*r* sin*α*) (2.26)

che uguagliate danno

tan*α* = 1

tan*α −* 4*r l*

sin*α .*

2.5 Forze parallele nello spazio 31

Moltiplicando per sin*α*cos *α* (nell’ipotesi che *α* = 0*,α* = *π/*2) e ricordando che sin2 *α* = 1 *−* cos2 *α*, si ottiene infine l’equazione:

8*r* cos2 *α − l* cos *α −* 4*r* = 0 *.* (2.27)

La geometria del problema richiede che 0 *<α<π/*2, cio`e che cos *α >* 0, per cui l’unica soluzione accettabile della (2.27) `e

cos*α* = *l* + *√l*2 + 128*r*2

16*r .* (2.28)

La (2.28) fornisce pertanto l’angolo *α* di inclinazione dell’asta. Noto l’angolo *α*, per mezzo della (2.25) si ricava la reazione *R*1.

(?) Si verifichi che la condizione cos*α <* 1 impone, tramite la (2.28), che *l <* 4*r*. Quest’ultima condizione `e comunque implicitamente contenuta nell’enunciato del problema, in quanto, se non fosse soddisfatta, l’asta non potrebbe essere inserita nel recipiente per pi`u di met`a della sua lunghezza.

**Esercizio 2.8**

*Tre cilindri uguali, ciascuno di peso* ***P****, sono sovrapposti come in Fig. 2.23. I due cilindri bassi poggiano sul piano orizzontale e contro le pareti verticali. Determinare le reazioni esercitate sui cilindri dal piano orizzontale e dalle pareti verticali (tutte le superfici a contatto sono liscie).*

**Fig. 2.23.** Esercizio 2.8

Consideriamo prima le forze esterne agenti sul sistema costituito dai tre cilin- dri. Il diagramma di corpo libero (Fig. 2.24) evidenzia i tre pesi ***P*** e le quattro reazioni ***R***2*,****R*** 2*,****R***3*,****R*** 3 normali alle superfici a contatto. Le forze sono complanari, per cui le condizioni di equilibrio sono:

∑*i* ***F*** *i* = 0 *,* ∑*i* ***τ*** *i* = 0 *.*

La condizione di *equilibrio delle forze* d`a:

3***P*** + ***R***2 + ***R***3 + ***R*** 2 + ***R*** 3 = 0 *,*

32 2 Statica

da cui, decomponendo le forze lungo gli assi *x* (orizzontale) e *y* (verticale):

*x* : 3*P − R*2 *− R*3 = 0; 3*P* = *R*2 + *R*3 (2.29) *y* : *R* 2 *− R* 3 = 0; *R* 2 = *R* 3 (2.30)

La condizione di *equilibrio dei momenti* (prendendo come polo, ad esempio,

**Fig. 2.24.** Esercizio 2.8

il punto di contatto tra i due cilindri inferiori) d`a:

*R*2 = *R*3 *.* (2.31)

Dalle (2.29) e (2.31) si ricava*R*2 = *R*3 = 3*P/*2 *.*

Resta da determinare l’intensit`a della reazione delle pareti, *R* 2 = *R* 3. Per farlo, `e necessario considerare separatamente l’equilibrio di ogni cilindro. Consideriamo prima il *cilindro superiore*. Sul cilindro superiore agiscono tre forze concorrenti (Fig. 2.25 a,b): il peso ***P*** e le due reazioni simmetriche ***R***21 e ***R***31. L’equilibrio dei momenti (rispetto ad esempio al punto *A*) impone l’uguaglianza dei moduli:

*R*21 = *R*31 *.* (2.32) L’equilibrio delle forze porta, per le componenti lungo *x* e *y*, alle due

**Fig. 2.25.** Esercizio 2.8

equazioni

2.5 Forze parallele nello spazio 33 {*x* : *R*21*x − R*31*x* = 0 *y* : *R*21*y* + *R*31*y* = *P*

{*R*21*x* = *−R*31*x* = *R*21 sin(*π/*6)

2*R*21 cos(*π/*6) = *P*

da cui

*R*21 = *R*31 = *√P*3 ; *| R*21*x |*=*| R*31*x|* = 2*√P*3 *.* (2.33) Consideriamo ora separatamente i due *cilindri inferiori* (Fig. 2.25 c,d). Sui due cilindri inferiori il cilindro superiore esercita le forze ***R***12 e ***R***13. Per il principio di azione e reazione

***R***12 = *−****R***21 *,* ***R***13 = *−****R***31 *.*

La (2.32) assicura che *R*12 pertanto sufficiente considerare = *R*13. Per la condizione determinare di equilibrio l’incognita delle forze *R* 2 = agenti *R* 3 `e

su uno solo dei due cilindri inferiori, ad esempio il n*◦* 2 (quello di sinistra) e proiettarla sull’asse *x*:

*R* 2 = *|R*12*x |* = *|R*21*x |* = *P/*2*√*3 *.*

(?) Perché nel diagramma di corpo libero del cilindro 2 non si `e considerata

la reazione esercitata dal cilindro 3 (e viceversa) ? (?) Cambierebbe la soluzione del problema se le superfici a contatto non fos-

sero liscie ? (?) Come cambiano le reazioni ***R*** 2 e ***R*** 3 se viene tolto il cilindro superiore ?

**Esercizio 2.9**

*Un cilindro omogeneo di raggio r e peso* ***P*** *poggia su di un piano orizzontale (Fig. 2.26). A) Si determini (in direzione e intensit`a) la forza minima* ***F*** min *che `e neces- sario applicare all’asse del cilindro per fargli superare un gradino di altezza h ruotando intorno allo spigolo C.*

**F**

h **Fig. 2.26.** Esercizio 2.9

Le forze agenti sul cilindro sono (Fig. 2.27 a):

– peso ***P***, applicato al baricentro *O* del cilindro; – reazione vincolare ***N*** del piano;

34 2 Statica

– reazione vincolare ***R*** dello spigolo *C*, di direzione incognita; – forza di sollevamento ***F***, di direzione indeterminata, applicata al baricen-

tro *O* del cilindro.

Si richiede che il cilindro ruoti intorno al punto *C*. Calcoliamo pertanto i momenti delle forze agenti rispetto al punto *C*. Notiamo subito che la reazione vincolare ***N*** si annulla non appena il cilindro si stacca dal piano. Il momento totale `e pertanto

***τ*** *c* = ∑*i* ***τ*** *c,i* = ***r*** *×* ***P*** + ***r*** *×* ***F*** *,*

dove ***r*** = ***CO***. Si noti che la reazione ***R*** `e applicata in *C*, pertanto il suo momento rispetto a *C* `e nullo.

La rotazione attorno allo spigolo `e possibile se il momento della forza ***F*** `e

**Fig. 2.27.** Esercizio 2.9

maggiore in modulo del momento del peso ***P*** (***r*** *×* ***F*** e ***r*** *×* ***R*** hanno infatti la stessa direzione ma versi opposti):

*|****r*** *×* ***F*** *|* = *|****r*** *×* ***P*** *| .* (2.34)

Indicando con *a* e *b*, rispettivamente, i bracci del peso ***P*** e della forza ***F*** rispetto a *C* (Fig. 2.27 b), si ha:

*bF > aP* cioe *F > aP/b .* (2.35)

Il braccio *a* della forza peso pu`o essere espresso in funzione del raggio *r* del cilindro e dell’altezza *h* del gradino:

*a* = √*r*2 *−* (*r − h*)2 = √*h*(2*r − h*) *.*

Il braccio *b* dipende dalla direzione della forza ***F***:

*b* = *r* sin*φ ,*

dove *φ* `e l’angolo tra ***F*** e ***CO***. La forza ***F*** `e minima nella (2.35) quando *b* `e massimo, cio`e quando sin*φ* =

2.6 Equilibrio di una carrucola 35

1*, φ* = *π/*2 (Fig. 2.27 c). La forza ***F*** min deve perci`o essere applicata in direzione perpendicolare al segmento *OC* (*φ* = *π/*2) e la sua intensit`a vale

*F*min =

√*h*(2*r r − h*)

*P* √=

*hr*

(2 *− hr*)

*P .* (2.36)

(?) Si discuta l’andamento di *F*min al variare dell’altezza *h* del gradino, in particolare per *h* = 0 e *h* = *r*. Il risultato (2.36) `e ancora valido per *h>r* ?

*B) Si determini la direzione della reazione vincolare* ***R****.*

Consideriamo la situazione in cui il cilindro `e in equilibrio. Oltre all’equazione dei momenti, gi`a utilizzata, deve essere verificata anche l’equazione dell’equi- librio delle forze:

***P*** + ***F*** + ***R*** = 0 ; cioe ***P*** + ***F*** = *−****R*** *.*

***R*** deve equilibrare la risultante ***P*** +***F*** applicata al baricentro *O* del cilindro. Ci`o `e possibile solo se la retta d’azione di ***R*** passa per *O*. ***R*** deve quindi essere diretta radialmente.

**2.6 Equilibrio di una carrucola**

Consideriamo una carrucola di raggio *R*, libera di ruotare senza attrito at- torno al suo asse *O*. Attorno alla carrucola passa una fune ai cui capi sono applicate due forze ***F*** 1 e ***F*** 2 (Fig. 2.28 a).

**Fig. 2.28.** Carrucola (**a**) e suo diagramma di corpo libero (**b**)

Le forze agenti sulla carrucola sono (Fig. 2.28 b):

– il peso ***P*** della carrucola, applicato all’asse; – le forze ***F*** 1 e ***F*** 2 applicate alla fune; – la reazione vincolare ***R*** applicata all’asse.

36 2 Statica

Si tratta di forze complanari; le condizioni di equilibrio sono:

∑*i* ***F*** *i* = 0 *,* ∑*i* ***τ*** *i* = 0 *.* (2.37)

La condizione sui momenti, calcolati rispetto all’asse *O*, richiede che

*R F*1 = *R F*2 *,* cioe *F*1 = *F*2 *.* (2.38)

In condizioni statiche la carrucola consente di cambiare direzione ad una forza senza modificarne l’intensit`a. (In condizioni dinamiche, ci`o `e possibile solo se il peso della carrucola `e trascurabile rispetto alle forze *F*1 e *F*2).

**Esercizio 2.10**

*Il sistema rappresentato in Fig. 2.29 `e costituito da due corpi C*1 *e C*2*, di pesi rispettivamente* ***P*** 1 *e* ***P*** 2*, da due carrucole uguali di raggio R e peso trascurabile e da una fune inestensibile di peso trascurabile con un estremo fissato al soffitto nel punto A. Il sistema `e in equilibrio. A) Si determini il rapporto tra i pesi P*1 *e P*2 *dei due corpi (nell’ipotesi che siano trascurabili tutti gli attriti).*

C**1**

C2 **Fig. 2.29.** Esercizio 2.10

Consideriamo separatamente le condizioni di equilibrio dei diversi corpi che compongono il sistema. Sul *corpo C*1 (Fig. 2.30 a) agiscono le forze concorrenti: – tensione della fune ***T*** 1; – peso ***P*** 1 del corpo *C*1. La condizione di equilibrio `e:

***P*** 1 + ***T*** 1 = 0 *,* quindi *P*1 = *T*1 *.* (2.39)

Sulla *carrucola 2* (Fig. 2.30 b) agiscono le forze complanari

2.6 Equilibrio di una carrucola 37

C

a b

c **Fig. 2.30.** Esercizio 2.10

– tensioni della fune, ***T*** 2 e ***T*** 3; – peso ***P*** 2 del corpo *C*2. Le condizioni di equilibrio sulle forze e sui momenti (calcolati rispetto all’asse della carrucola 2) sono:

{***P*** 2 + ***T*** 2 + ***T*** 3 = 0

*RT*2 = *RT*3 *⇒*

{*P*2 = *T*2 + *T*3

*T*2 = *T*3

da cui:

*P*2 = 2 *T*3 *.* (2.40) Sulla *carrucola 1* (Fig. 2.30 c) agiscono le forze parallele

– tensioni della fune, *−****T*** 1 e *−****T*** 2; – reazione vincolare ***N*** 1 del soffitto.

Le condizioni di equilibrio sono:

{***N*** 1 *−* ***T*** 1 *−* ***T*** 2 = 0

*RT*2 = *RT*1 *⇒*

{*N* = *T*1 + *T*2

*T*1 = *T*2 (2.41)

La tensione della fune `e uguale in tutti i suoi punti: *T*1 = *T*2 = *T*3. Dalle (2.39) e (2.40) il rapporto tra *P*1 e *P*2 `e quindi

*P*1*P*2 = *T*1

2*T*3 = 12 *.*

La macchina qui studiata ha un evidente interesse pratico, in quanto con- sente di equilibrare una forza di intensit`a *P*2 applicando una forza di minore intensit`a, *P*1 = *P*2*/*2.

(?) Qual `e lo sforzo totale esercitato sul soffitto ?

*B) Se il punto A di sospensione della fune al soffitto viene spostato verso sin- istra in una nuova posizione A (Fig. 2.31), il sistema rimane in equilibrio ?*

38 2 Statica

α

C**1**

C2Fig. 2.31. Esercizio 2.10

Studiamo l’equilibrio della carrucola 2 nella nuova configurazione. Chiamia- mo Se cale decomponiamo T (Fig. 2 e T 2.32 3 le a), tensioni le le condizioni tensioni della fune.

T 2 di e equilibrio T 3 secondo per le direzioni la carrucola orizzontale 2 sono: e verti- ⎛⎨⎝PT RT 2x 2 2 = = = T T 2y RT 3x + 3

T 3y ⎛⎨⎝P2 = 2T 2 sinα

T 3 = T 2

L’equilibrio della carrucola 1 (Fig. 2.32 b) richiede che

P1 = T 2 .

Per avere equilibrio il rapporto tra i pesi P1 e P2 dovrebbe pertanto essere

P1P2 = 1

2 sinα; P1 = P2

2 sinα > P22 .

Se P1 = P2/2, il sistema `e in equilibrio per A = A (cio`e α = π/2) ma non pu`o rimanere in equilibrio se A viene spostato verso destra (α < π/2): in tal caso il corpo C2 scende e il corpo C1 sale.

a b

⇒

**T’T’2y T’3y2**

α α **T’3 T’2xT’3xP1**

**T’2-T’2**

**T’3**

**P2**

**P2** Fig. 2.32. Esercizio 2.10

Esercizio 2.11

Nel sistema mostrato in Figura 2.33, un uomo di peso P mantiene in equili- brio la piattaforma sospesa AB esercitando una trazione verticale F sul capo

2.6 Equilibrio di una carrucola 39

*C della fune. Le due carrucole hanno ugual raggio R, la piattaforma `e lunga* 3*R. Carrucole e piattaforma hanno pesi trascurabili. A) Si determini l’intensit`a della forza* ***F****.*

**Fig. 2.33.** Esercizio 2.11

Individuiamo per prima cose tutte le forze agenti sui singoli componenti il sistema (Fig. 2.34). Sulla *carrucola 2* agiscono le forze esercitate dalle funi, *−****T*** 1 verso l’alto, ***T*** 2 verso il basso. Inoltre

*T*2 = *F .* (2.42) L’equilibrio della carrucola 2 richiede che

*T*1 = *F* + *T*2 = 2 *F .* (2.43)

Consideriamo ora l’equilibrio della *piattaforma*. L’uomo esercita sulla fune

a **Fig. 2.34.** Esercizio 2.11

una forza ***F*** diretta verso il basso; per il principio di azione e reazione la fune esercita sull’uomo una forza *−****F*** diretta verso l’alto. La forza con cui l’uomo grava sulla piattaforma `e pertanto ***P*** *−* ***F***. Le forze agenti sulla piattaforma sono complanari e parallele; le condizioni di equilibrio sono:

40 2 Statica

∑*i Fiy* = 0 *,* (2.44) ∑*i τi* = 0 *.* (2.45)

La condizione (2.44), tenendo conto delle (2.42) e (2.43), d`a:

*P* = *F* + *T*1 + *T*2 *⇒ P* = 4*F ⇒ F* = *P/*4 *.* (2.46)

L’intensit`a di ***F*** `e cos`ı determinata. Si faccia per`o attenzione che la condizione (2.44) `e *necessaria* ma non *suf- ficiente* per l’equilibrio. Dobbiamo pertanto verificare anche la condizione (2.45), cio`e la condizione sui momenti. Calcoliamo i momenti rispetto al punto *O* di appoggio dell’uomo sulla piattaforma:

2 *R T*2 = *R T*1 *⇒ T*1 = 2 *T*2 *.* (2.47)

La (2.47) `e in accordo con le (2.42) e (2.43). Anche la condizione di equilibrio (2.45) `e pertanto soddisfatta.

*B) `E possibile mantenere l’equilibrio nel caso le due carucole abbiano raggi diversi ? Si consideri ad esempio il caso R*1 *> R*2*, con AB* = 2*R*1 + *R*2*.*

`E facile verificare che anche in questo secondo caso sono validi i risultati espressi dalle (2.42), (2.43) e (2.46):

*T*1 = 2*T*2 = 2*F , F* = *P/*4 *.*

La condizione di equilibrio dei momenti, calcolati rispetto al punto *O* di appoggio dell’uomo sulla piattaforma, richiede in questo caso che:

*T*1 (2*R*1 *− R*2) = 2 *T*2*R*2 *,*

cio`e

*T*1 = 2 *T*2 *R*2

2*R*1 *− R*2 *.* (2.48) La (2.48) `e incompatibile con la (2.43) se *R*1 = *R*2. Il sistema non pu`o pertanto essere in equilibrio se le due carrucole hanno raggio diverso.

**2.7 *Problemi non risolti***

**2.1.** Un corpo di massa *m* = 100kg `e appeso mediante una fune ad una mensola costituita da tre aste rigide *AP*, *BP* e *CP* disposte come in Fig. 2.35 a: *α* = *π/*6, *β* = *π/*3, *γ* = *π/*2. La fune e le aste hanno massa trascurabile. Si determinino gli sforzi sulle tre aste.

2.7 *Problemi non risolti* 41

**2.2.** Un corpo di massa *M* = 100kg `e appeso all’estremit`a *B* di una fune omogenea *AB* di massa *m* = 2kg che pu`o scorrere con attrito trascurabile attorno ad un perno orizzontale. All’estremit`a *A* della fune `e applicata una forza verticale ***F*** che mantiene il sistema in equilibrio (Fig. 2.35 b). Si deter- minino:

- l’intensit`a della forza ***F***, - la tensione *T* della fune agli estremi *A* e *B*, - la tensione *T* al centro *C* della fune.

nelle tre ipotesi:

a) le estremit`a *A* e *B* sono alla stessa altezza; b) l’estremit`a *A* `e all’altezza del perno; c) l’estremit`a *B* `e all’altezza del perno.

A BC

m a

b c mA B Mm

**Fig. 2.35.** (**a**) Problema 2.1, (**b**) Problema 2.2, (**c**) Problema 2.3

**2.3.** Un cilindro di massa *m* `e in equilibrio su un piano inclinato di un angolo *α* rispetto all’orizzontale. L’equilibrio `e mantenuto per mezzo di una fune che passa attorno al cilindro ed ha un’estremit`a fissata al piano inclinato, l’altra estremit`a tirata verso l’alto da una forza verticale ***F*** (Fig. 2.35 c). Determinare:

a) l’intensit`a della forza ***F***; b) la reazione esercitata dal piano inclinato.

**2.4.** Una sferetta di raggio trascurabile e peso *P* = 100N `e attaccata all’estremo *B* di una fune *AB* di peso trascurabile. L’altro estremo *A* `e legato ad un chiodo. La sferetta poggia su di una superficie sferica liscia di raggio *r* = 50cm (Fig. 2.36 a). La distanza tra il chiodo *A* e la superficie sferica `e *d* = 30 cm, la lunghezza della fune `e *l* = 50 cm. Si determinino:

a) la tensione *T* della fune; b) la reazione *R* esercitata dalla superficie sferica.

42 2 Statica

**2.5.** Una molla `e legata per un’estremit`a al punto pi`u alto di una guida circolare di raggio *r* disposta verticalmente e per l’altra estremit`a ad un anello di massa *m* e raggio trascurabile in grado di scorrere senza attrito lungo la guida circolare (Fig. 2.36 b). La lunghezza della molla a riposo `e *l <* 2*r*. Quando viene stirata, la molla reagisce con una forza elastica ***F*** = *−k* **Δ*l***. Determinare:

a) i valori assunti dall’angolo *φ* tra l’elastico e la verticale nelle posizioni di

equilibrio dell’anello; b) la condizione cui deve soddisfare la costante *k* affinché l’anello sia in equi-

librio ad un angolo *φ* = 0.

l l

**Fig. 2.36.** (**a**) Problema 2.4, (**b**) Problema 2.5, (**c**) Problema 2.6

**2.6.** Una trave di lunghezza *l* e spessore *h* `e vincolata nel piano verticale da due perni fissi *A* e *B* (Fig. 2.36 c). Si determini il valor massimo dell’angolo di inclinazione *θ* compatibile con l’equilibrio se il coefficiente d’attrito tra trave e perni `e *μ*. (Si eseguano i calcoli ponendo: *l* = 2 m, *a* = 0.2 m, *b* = 0.2 m, *c* = 0.3 m, *h* = 0.1 m, *μ* = 0.3).

**2.7.** Due sferette di raggio trascurabile e masse *m*1 e *m*2, collegate tra loro da una fune di massa trascurabile e di lunghezza *l*, sono in equilibrio su una superficie cilindrica liscia di raggio *r* (Fig. 2.37 a). Determinare:

a) le relazioni tra gli angoli *φ*1 e *φ*2 all’equilibrio; b) le reazioni vincolari *N*1 e *N*2 esercitate dal cilindro sulle sferette.

**2.8.** Una sbarra omogenea *AB* di peso ***P*** e lunghezza *l* `e appoggiata con un’estremit`a ad una parete verticale liscia; l’altra estremit`a `e sostenuta da una fune leggera attaccata alla parete nel punto *C* (Fig. 2.37 b). Indicando con *α* l’angolo tra la sbarra in equilibrio e la parete, si determinino:

- la distanza *BC* tra il punto *B* di appoggio della sbarra alla parete ed il

punto *C*;

2.7 *Problemi non risolti* 43

l

**Fig. 2.37.** (**a**) Problema 2.7, (**b**) Problema 2.8, (**c**) Problema 2.9

- la tensione *T* esercitata dalla fune; - la reazione *R* esercitata dalla parete.

**2.9.** La *puleggia differenziale* `e una macchina costituita da: due pulegge con- nesse rigidamente con l’asse di rotazione fisso in comune, una puleggia mobile al cui asse viene appeso il corpo di peso *P* da sollevare, una fune avvolta come in Fig. 2.37 c attorno alle pulegge. Indichiamo con *r* e *R* i raggi delle due pulegge ad asse fisso. Si determini la forza *T* che `e necessario applicare al punto *A* della fune per tenere in equilibrio il corpo di peso *P* nei due casi: a) il peso della fune `e trascurabile; b) il peso della porzione di fune liberamente appesa (nella figura, il tratto

*ABC*) `e *p*.

(Si eseguano i calcoli per *r* = 0.9 *R*, *P* = 100 N, *p* = 2N).

l

**Fig. 2.38.** (**a**) Problema 2.10, (**b**) Problema 2.11

**2.10.** Un cavo omogeneo di peso *P* `e appeso tra due pareti verticali. Le estre- mit`a del cavo sono fissate a due punti *A* e *B* alla stessa quota (Fig. 2.38 a). Sia *l* la distanza tra i punti *A* e *B* e *f* la freccia del cavo. Supponendo per semplicit`a che il peso del cavo possa essere scomposto in due parti uguali applicate una a distanza *l/*4, l’altra a distanza 3*l/*4 dal punto *A*, si deter- minino:

44 2 Statica

a) la tensione *T* del cavo nel suo punto centrale; b) le reazioni *RA* e *RB* esercitate dalle pareti.

**2.11.** Una sbarra omogenea, sorretta per un’estremit`a da una fune di peso trascurabile, `e appoggiata con l’altra estremit`a ad un piano orizzontale ruvido (Fig. 2.38 b). Sia *α* l’angolo tra la sbarra e il piano, *β* l’angolo tra la fune e la verticale, *μ* il coefficiente d’attrito tra asta e piano. Si determini il valore dell’angolo *β* per il quale l’asta comincia a scivolare.

**3 Cinematica**

**3.1 Moto unidimensionale**

Consideriamo il moto di un punto *P* su traiettoria rettilinea. Una volta scelti sulla retta un punto origine *O* ed un’orientazione, `e possibile individuare la posizione istantanea del punto *P* per mezzo della sua coordinata *x* (Fig. 3.1).

x

**Fig. 3.1.** Moto di un punto *P* lungo una traiettoria rettilinea

*Legge oraria*

La legge oraria `e la funzione *x*(*t*) che descrive la variazione della posizione *x* in funzione del tempo *t*. La distanza *x* dall’origine si misura in metri, il tempo *t* in secondi. Alcune semplici leggi orarie sono:

*x*(*t*) = *k , x*(*t*) = *kt , x*(*t*) = *A*sin(*ωt*) *,* (3.1)

rappresentate graficamente in Fig. 3.2.

**Fig. 3.2.** Rappresentazione grafica delle leggi orarie espresse nella (3.1)

(?) In che unit`a di misura vanno espresse le costanti *k*, *A*, *ω* nei tre esempi

considerati ?

46 3 Cinematica

*Velocit`a*

La *velocit`a media* relativa all’intervallo di tempo Δ*t* = *t*2 *− t*1 (Fig. 3.3 a) `e definita come

*vm* = *x*2 *− x*1

*t*2 *− t*1 = Δ*x*Δ*t .* (3.2) La *velocit`a istantanea* `e la derivata prima della legge oraria:

*v*(*t*) = Δ*t→*0

lim Δ*x*Δ*t* = d*x*d*t* (3.3)

La velocit`a si misura in metri al secondo (m s*−*1). Calcoliamo la velocit`a istantanea negli esempi (3.1):

*v*(*t*)=0 *, v*(*t*) = *k , v*(*t*) = *Aω* cos(*ωt*)*.* (3.4)

**a b**

**Fig. 3.3.** Calcolo della velocit`a (**a**) e dell’accelerazione (**b**)

*Accelerazione*

L’ *accelerazione media* relativa all’intervallo di tempo Δ*t* = *t*2*−t*1 (Fig. 3.3 b) `e definita come

*am* = *v*2 *− v*1

*t*2 *− t*1 = Δ*v*Δ*t .* (3.5) L’*accelerazione istantanea* `e la derivata prima della velocit`a, cio`e la derivata seconda della legge oraria:

*a*(*t*) = Δ*t→*0

lim Δ*v*Δ*t* = d*v*d*t* = dd*t*2*x*

2 *.* (3.6)

L’accelerazione si misura in metri al secondo per secondo (m s*−*2). Calcoliamo l’accelerazione istantanea negli esempi (3.1):

*a*(*t*)=0 *, a*(*t*)=0 *, a*(*t*) = *−Aω*2 sin(*ωt*)*.* (3.7)

3.1 Moto unidimensionale 47

*Nota la velocit`a, ricavare la legge oraria*

Nota la velocit`a in funzione del tempo, *v*(*t*), la legge oraria *x*(*t*) si pu`o ricavare risolvendo l’equazione differenziale del primo ordine

dd*t* [*x*(*t*)] = *v*(*t*)*.* (3.8)

La soluzione (Fig. 3.4 a)

*x*(*t*) = *x*0 +

∫ *t*

*t*0 *v*(*t* )d*t* (3.9)

`e univocamente determinata solo se `e nota la *condizione iniziale x*0 = *x*(*t*0). (La soluzione di un’equazione differenziale del primo ordine contiene sempre una costante di integrazione).

**Fig. 3.4.** Calcolo della legge oraria, nota la velocit`a in funzione del tempo

*Moto uniforme*

Se *v*(*t*) = *v*1 = costante, il moto `e detto uniforme (Fig. 3.4 b). La legge oraria (3.9) diviene

*x*(*t*) = *x*0 + *v*1 (*t − t*0)*.* (3.10) Se non viene specificato il valore di *x*0 (posizione all’istante *t*0), non `e possibile scegliere tra le infinite leggi orarie per le quali *v*(*t*) = *v*1 (Fig. 3.4 c).

*Nota l’accelerazione, ricavare la velocit`a*

Nota l’accelerazione in funzione *del tempo*, *a*(*t*) (Fig. 3.5), la velocit`a *v*(*t*) si pu`o ricavare risolvendo l’equazione differenziale del primo ordine

dd*t* [*v*(*t*)] = *a*(*t*)*.* (3.11)

La soluzione

*v*(*t*) = *v*0 +

∫ *t*

*t*0 *a*(*t* )d*t* (3.12)

48 3 Cinematica

**Fig. 3.5.** Accelerazione in funzione del tempo

`e univocamente determinata solo se `e nota la *condizione iniziale v*0 = *v*(*t*0). Nota l’accelerazione in funzione *della posizione*, *a*(*x*), la velocit`a *v*(*x*) si pu`o ricavare integrando *a*(*x*) rispetto a *x*:

∫ *xx*0 *a*(*x* )d*x* =

∫ *vv*0 *v* d*v* = 12*v*2(*x*) *−* 12*v*0 2*,* (3.13)

cio`e

*v*(*x*) = *±*

√

*v*0 2+ 2∫ *xx*0 *a*(*x* )*dx ,* (3.14) dove *v*0 = *v*(*x*0) `e la velocit`a alla posizione iniziale.

*Moto uniformemente vario*

Se *a*(*t*) = *a*1 = costante (Fig. 3.6 a), il moto `e detto uniformemente vario. Dalla (3.12) si ottiene la velocit`a in funzione del tempo:

*v*(*t*) = *v*0 + *a*1 (*t − t*0)*.* (3.15)

La velocit`a dipende linearmente dal tempo (Fig. 3.6 b). E’ perci`o agevole ricavare la legge oraria utilizzando la (3.9):

*x*(*t*) = *x*0 + *v*0 (*t − t*0) + 12*a*1 (*t − t*0)2*.* (3.16)

(?) Si derivi due volte la legge oraria (3.16) e si verifichi che essa corrisponde

ad un’accelerazione costante.

Il grafico di *x*(*t*) `e parabolico (Fig. 3.6 c). Se *a*1 *>* 0 la parabola ha concavit`a rivolta verso l’alto; se *a*1 *<* 0 la parabola ha concavit`a rivolta verso il basso. Si noti che la determinazione della legge oraria (3.16) richiede la conoscenza di due condizioni iniziali, *x*0 e *v*0. Nota *a*(*t*), la legge oraria si ottiene infatti risolvendo l’equazione differenziale del secondo ordine

d2d*t*2 [*x*(*t*)] = *a*(*t*)*.* (3.17)

In generale, la soluzione di un’equazione differenziale di ordine *n* contiene *n* costanti d’integrazione.

3.1 Moto unidimensionale 49

**Fig. 3.6.** Calcolo della legge oraria per un moto uniformemente vario: (**a**) accele- razione, (**b**) velocit`a, (**c**) posizione in funzione del tempo

*Moto con a(x) costante*

Se l’accelerazione non dipende dalla posizione, cio`e se *a*(*x*) = *a*1 = costante, la (3.14) diviene:

*v*(*x*) = *±*

√

*v*0 2+ 2*a*1 (*x − x*0)*.* (3.18)

Caso tipico `e l’accelerazione di gravit`a, costante in direzione verso e modulo: *a* = *g* = 9*.*8 ms*−*2.

**Esercizio 3.1**

*Un convoglio della metropolitana parte dalla stazione A e si ferma alla stazione B, che si trova a distanza d* = 4km*. Il convoglio effettua le fasi di accelerazione e frenamento con accelerazione costante, di modulo a* = 1ms*−*2*. Si determini il tempo minimo necessario a percorrere il tratto tra le due stazioni e si disegni il grafico velocit`a-tempo. A) Si supponga che il convoglio non abbia alcun limite di velocit`a.*

Il moto si compone di due fasi (Fig. 3.7 a): accelerazione e decelerazione. Nella prima fase il moto `e uniformemente accelerato fino a raggiungere la massima velocit`a *vm* compatibile con la necessit`a di doversi arrestare alla stazione *B*. La fase di accelerazione dura un intervallo di tempo *t*1 = *vm/a* durante il quale viene percorsa una distanza *x*1:

*x*1 = *at*21*/*2 = *vm*2*/*2*a .*

Nella seconda fase, di frenamento, la velocit`a varia nel tempo secondo la legge

*v*(*t*) = *vm − at ,*

dove *t* `e il tempo misurato a partire dall’istante in cui ha inizio la decelera- zione. L’intervallo di tempo *t*2 impiegato dal convoglio a passare dalla velocit`a *vm* alla velocit`a zero `e dato da

50 3 Cinematica

**Fig. 3.7.** Esercizio 3.1

0 = *vm − at*2 *⇒ t*2 = *vm/a .*

Lo spazio percorso nell’intervallo di tempo *t*2 `e

*x*2 = 12*at*22 = *v*2*m*2*a .*

Il valore della velocit`a massima *vm* si ricava imponendo

*d* = *x*1 + *x*2 = *v*2*m*2*a* + *v*2*m*2*a ⇒ vm* = *√da .*

Il tempo minimo impiegato a percorrere il tratto *AB* `e:

*T* = *t*1 + *t*2 = 2*vm/a* = 2√*d/a .*

Sostituiamo i valori numerici (*d* = 4 km = 4000 m), ottenendo

*T* = 2√*d/a* = 126*.*5s *.*

Disegnamo il diagramma velocit`a-tempo (Fig. 3.7 b). L’area del triangolo OST rappresenta la distanza tra le stazioni *A* e *B*. Se il convoglio raggiungesse una velocit`a maggiore di *vm*, non sarebbe poi in grado di arrestarsi entro la stazione *B* per effetto della decelerazione costante *a*. Se invece raggiungesse una velocit`a massima *vn < vm* e proseguisse per un tratto a velocit`a costante *vn* impiegherebbe un tempo *Tn > T* per raggiungere la stazione *B* (l’area del triangolo OST deve infatti essere uguale a quella del trapezio ORUT*n*.)

(?) E’ lecito considerare un convoglio della metropolitana come un punto

materiale ?

*B) Si supponga che la velocit`a massima consentita sia V* = *60 km h−*1*.*

In questo caso il moto si compone di tre fasi (Fig. 3.8 a): 1: Moto uniformemente accelerato; il convoglio accelera fino a raggiungere la velocit`a limite *V* , percorrendo lo spazio

3.1 Moto unidimensionale 51

*x* 1 = *V* 2*/*2*a* nel tempo *t* 1 = *V/a .*

2: Moto uniforme a velocit`a *V* : il convoglio procede a velocit`a *V* per un tempo *t* 2 durante il quale percorre lo spazio

*x* 2 = *V t* 2 *.*

3: Moto uniformemente decelerato: il convoglio decelera fino a fermarsi, per- correndo lo spazio*x* 3 = *V* 2*/*2*a* nel tempo *t* 3 = *V/a .*

**Fig. 3.8.** Esercizio 3.1

Imponendo che *d* = *x* 1 + *x* 2 + *x* 3, lo spazio percorso a velocit`a costante `e

*x* 2 = *d −* (*x* 2 + *x* 3) = *d − V* 2*/a*

e il tempo impiegato a percorrerlo `e

*t* 2 = *x* 2*V* = *dV − Va .*

Il tempo *T* globalmente impiegato a percorrere il tratto *AB* `e

*T* = *t* 1 + *t* 2 + *t* 3 = *dV* + *Va .*

Sostituiamo i valori numerici (*V* = 60 km h*−*1 = 16.66 m s*−*1), ottenendo:

*T* = *dV − Va* = 256*.*7 s *.*

Disegnamo il grafico velocit`a-tempo (Fig. 3.8 b). L’area del trapezio ORST `e uguale alla distanza *d*. Se il treno accelerasse fino a raggiungere una velocit`a massima *v < V* , impiegherebbe un tempo maggiore a percorrere la distanza *d* (l’area del trapezio ORST deve infatti essere uguale a quella del trapezio OHKT ).